

# Geometrisch nichtlineare Formulierung räumlicher Stabtragwerke

Martin Ruess

Juni 2006

Technischer Bericht

Institut für Bauingenieurwesen  
Technische Universität Berlin

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Geometrie</b>	<b>3</b>
1.1 Referenzkonfiguration . . . . .	3
1.1.1 Globale Koordinaten . . . . .	3
1.1.2 Stabkoordinaten . . . . .	4
1.1.3 Koordinatentransformation . . . . .	4
1.1.4 Stabform . . . . .	5
1.2 Momentankonfiguration . . . . .	6
1.2.1 Verschiebungszustand . . . . .	6
1.2.2 Lokale Basis am Punkt $\hat{Q}$ . . . . .	7
<b>2 Verschiebungsansatz für Stäbe</b>	<b>8</b>
2.1 Hypothesen von Bernoulli . . . . .	8
2.2 Drehmatrix . . . . .	8
2.2.1 Kontrolle der Drehmatrix . . . . .	10
2.2.2 Quadratische Approximation der Drehmatrix . . . . .	11
2.2.3 Drehverschiebung eines Punktes . . . . .	12
2.3 Verschiebungsansatz . . . . .	12
2.3.1 Zweite Bernoulli-Hypothese . . . . .	13
2.3.2 Koeffizienten der Drehverschiebungsmatrix . . . . .	15
2.3.3 Ableitungen der Koeffizienten der Drehverschiebungsmatrix . . . . .	15
2.3.4 Ableitungen des Verschiebungsansatzes . . . . .	16
2.3.5 Substitution der Drehverschiebungskoeffizienten . . . . .	17
<b>3 Dehnungszustand des Stabes</b>	<b>19</b>
3.1 Dehnungstensor . . . . .	19
3.2 Dehnungstensorkoordinaten . . . . .	20
3.3 Drillung der Stabachse . . . . .	23
<b>4 Spannungszustand des Stabes</b>	<b>25</b>
4.1 Materialgesetz . . . . .	25
4.2 Spannungszustand . . . . .	25
4.3 Schubspannungen . . . . .	26
<b>5 Schnittgrößenzustände</b>	<b>28</b>
5.1 Schnittkräfte . . . . .	28
5.2 Schnittmomente . . . . .	28
<b>6 Randbedingungen</b>	<b>30</b>
6.1 Kinematische Randbedingungen . . . . .	30
6.2 Statische Randbedingungen . . . . .	30

<b>7</b>	<b>Inkrementelle Bestimmungsgleichungen</b>	<b>31</b>
7.1	Konzept . . . . .	31
7.2	Verschiebungsinkremente . . . . .	31
7.2.1	Koeffizienten der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix . . . . .	32
7.2.2	Ableitungen der Koeffizienten der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix . . . . .	34
7.2.3	Ableitungen des inkrementellen Verschiebungsansatzes . . . . .	35
7.2.4	Substitution der inkrementellen Drehverschiebungskoeffizienten . . . . .	36
7.3	Dehnungsinkremente . . . . .	38
7.4	Variation des Verschiebungszustandes . . . . .	41
7.5	Inkrementelle Form der Bestimmungsgleichungen . . . . .	41
7.5.1	Materielle Form der Bestimmungsgleichungen . . . . .	41
7.5.2	Inkrementelle Form der Bestimmungsgleichungen . . . . .	42
7.6	Semianalytische Form der inkrementellen Bestimmungsgleichungen . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Algebraische Bestimmungsgleichungen</b>	<b>49</b>
8.1	Ansatz im Finiten Element . . . . .	49
8.1.1	Interpolation der Geometrie . . . . .	49
8.1.2	Interpolation der Physik . . . . .	49
8.1.3	Transformation des Stützvektors . . . . .	51
8.1.4	Ableitungen des Stützvektors . . . . .	52
8.1.5	1. Ableitungen . . . . .	52
8.1.6	2. Ableitungen . . . . .	53
8.2	Inkrementeller Verschiebungsansatz . . . . .	55
8.2.1	Interpolation des Dehnungszustandes der Momentankonfiguration $\hat{C}$ . . . . .	55
8.2.2	Interpolation der Dehnungsinkremente . . . . .	56
8.3	Systemgleichungen . . . . .	59
8.3.1	Topologie . . . . .	59
8.3.2	Systemsteifigkeit . . . . .	59
<b>9</b>	<b>Transformation lokal-global</b>	<b>63</b>
9.1	Globales und lokales Koordinatensystem . . . . .	63
9.2	Transformation der Zustandsgrößen . . . . .	64
9.3	Bestimmung der Transformationsmatrix . . . . .	64
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>66</b>

# 1 Geometrie

## 1.1 Referenzkonfiguration

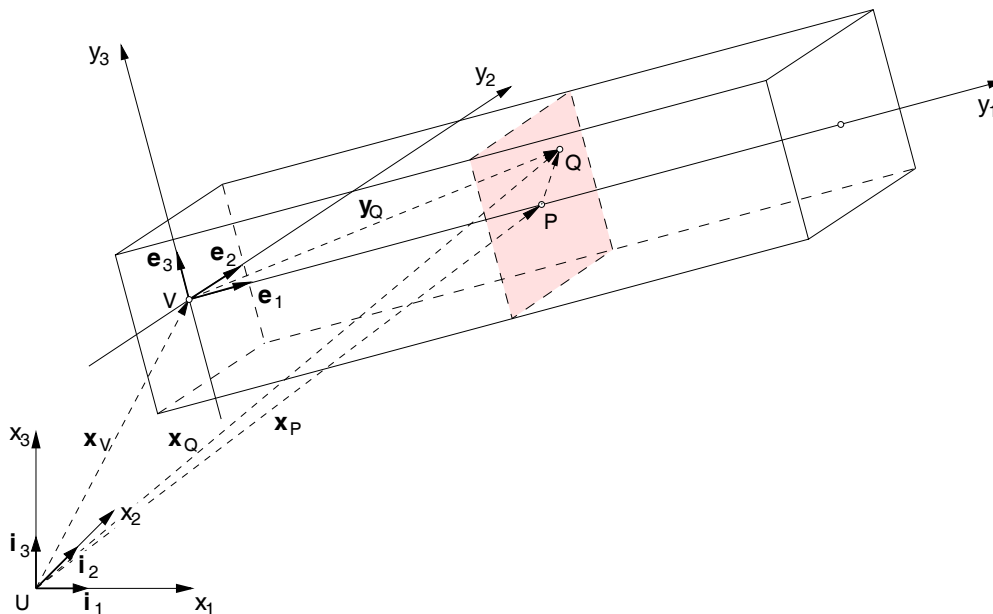


Bild 1: Geometrie des Stabes in der Referenzkonfiguration  $C$

Die materiellen Punkte des Stabes werden durch ihre Koordinaten in der Referenzkonfiguration  $C$  identifiziert. Die Koordinaten der Knoten des Stabwerks werden in einem globalen Koordinatensystem mit Ursprung  $U$  und kartesischer Basis  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  spezifiziert. Für die Spezifikation der Koordinaten der materiellen Punkte eines Stabes wird ein Stabkoordinatensystem mit der kartesischen Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  eingeführt, dessen Ursprung  $V$  am Anfang der Stabachse liegt. Die globalen Koordinaten werden mit  $x_1, x_2, x_3$  bezeichnet, die Stabkoordinaten mit  $y_1, y_2, y_3$ .

### 1.1.1 Globale Koordinaten

Die globalen Koordinaten eines materiellen Punktes  $Q$  des Stabes seien  $x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}$ . Der globale Ortsvektor  $\mathbf{x}_{(Q)}$  von  $Q$  ist damit definiert als Linearkombination der Basis  $\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(Q)} &= x_{1Q}\mathbf{i}_1 + x_{2Q}\mathbf{i}_2 + x_{3Q}\mathbf{i}_3 &= \mathbf{I} \mathbf{x}_{(Q)} \\ \begin{bmatrix} x_{1Q} \\ x_{2Q} \\ x_{3Q} \end{bmatrix} &= x_{1Q} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{2Q} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{3Q} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1Q} \\ x_{2Q} \\ x_{3Q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

### 1.1.2 Stabkoordinaten

Die Stabkoordinaten eines materiellen Punktes  $Q$  seien  $y_1, y_2, y_3$ . Der Ortsvektor  $\mathbf{y}_Q$  von  $Q$  ist damit definiert als eine Linearkombination von Einheitsvektoren  $\mathbf{b}_i (i = 1, 2, 3)$  des lokalen Koordinatensystem  $\{0; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  des Stabes :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{(Q)} &= y_{1Q} \mathbf{b}_1 + y_{2Q} \mathbf{b}_2 + y_{3Q} \mathbf{b}_3 &= \mathbf{B} \mathbf{y}_{(Q)} = \mathbf{I} \mathbf{y}_{(Q)} \\ \begin{bmatrix} y_{1Q} \\ y_{2Q} \\ y_{3Q} \end{bmatrix} &= y_{1Q} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y_{2Q} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_{3Q} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{1Q} \\ y_{2Q} \\ y_{3Q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

### 1.1.3 Koordinatentransformation

Der Ortsvektor des Ursprungs  $V$  des Stabkoordinatensystems im globalen Koordinatensystem sei  $\mathbf{x}_{(V)}$ . Seine globalen Koordinaten werden mit  $x_{iV}$  bezeichnet :

$$\mathbf{x}_{(V)} = x_{1V} \mathbf{i}_1 + x_{2V} \mathbf{i}_2 + x_{3V} \mathbf{i}_3 \quad (3)$$

Die Koordinaten der Stabbasisvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  werden im globalen Koordinatensystem spezifiziert :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &= e_{1n} \mathbf{i}_1 + e_{2n} \mathbf{i}_2 + e_{3n} \mathbf{i}_3 & n = 1, 2, 3 \\ \begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ e_{3n} \end{bmatrix} &= e_{1n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e_{2n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e_{3n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Der Ortsvektor  $\mathbf{x}_{(Q)}$  des Punktes  $Q$  ist die Summe des Ortsvektors  $\mathbf{x}_{(V)}$  des Stabursprungs und der Koordinaten  $y_{iQ} \mathbf{e}_i$  des Stabortsvektors im globalen Koordinatensystem :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(Q)} &= \mathbf{x}_V + y_{1Q} \mathbf{e}_1 + y_{2Q} \mathbf{e}_2 + y_{3Q} \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{x}_V + \mathbf{E} \mathbf{y}_{(Q)} \\ \begin{bmatrix} x_{1Q} \\ x_{2Q} \\ x_{3Q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{1V} \\ x_{2V} \\ x_{3V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{1Q} \\ y_{2Q} \\ y_{3Q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Basisvektoren bestimmen sich aus den Ableitungen der Ortsvektoren :

1. Basisvektoren  $\mathbf{i}_n$  des globalen Koordinatensystems  $\{0; \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ , beschrieben in globalen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  :

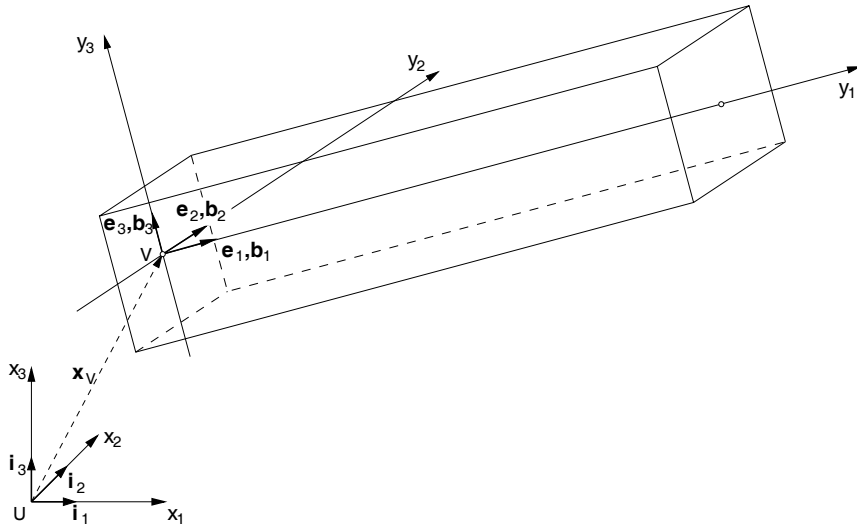
$$\frac{\partial \mathbf{x}_{(Q)}}{\partial x_n} = \mathbf{i}_n \quad (n = 1, 2, 3) \quad (6)$$

2. Basisvektoren  $\mathbf{e}_n$  des lokalen Koordinatensystems  $\{V; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , beschrieben in globalen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  :

$$\frac{\partial \mathbf{x}(Q)}{\partial y_n} = \mathbf{e}_n \quad (n = 1, 2, 3) \quad (7)$$

3. Basisvektoren  $\mathbf{b}_n$  des lokalen Koordinatensystems  $\{0; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , beschrieben in lokalen Koordinaten  $y_1, y_2, y_3$  :

$$\frac{\partial \mathbf{y}(Q)}{\partial y_n} = \mathbf{b}_n \quad (n = 1, 2, 3) \quad (8)$$



#### 1.1.4 Stabform

Es wird vorausgesetzt, daß die Stabachse gerade und der Stab prismatisch ist. Die Stabkoordinaten eines Punktes  $P$  auf der Stabachse werden mit  $(y_1, 0, 0)$  bezeichnet. Die Vektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  der Stabbasis unterspannen am Punkt  $P$  eine Ebene mit der Flächennormalen  $\mathbf{e}_1$ . Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $Q$  dieser Ebene im Stabkoordinatensystem ist :

$$\mathbf{y}(Q) = \mathbf{y}(P) + y_{2Q}\mathbf{e}_2 + y_{3Q}\mathbf{e}_3 \quad (9)$$

Der Stab besitzt einen rechteckigen Querschnitt, wenn die Koordinaten  $y_2$  und  $y_3$  in folgenden Bereichen liegen :

$$\begin{aligned} -b &\leq y_{2Q} \leq b \\ -h &\leq y_{3Q} \leq h \end{aligned} \quad (10)$$

## 1.2 Momentankonfiguration

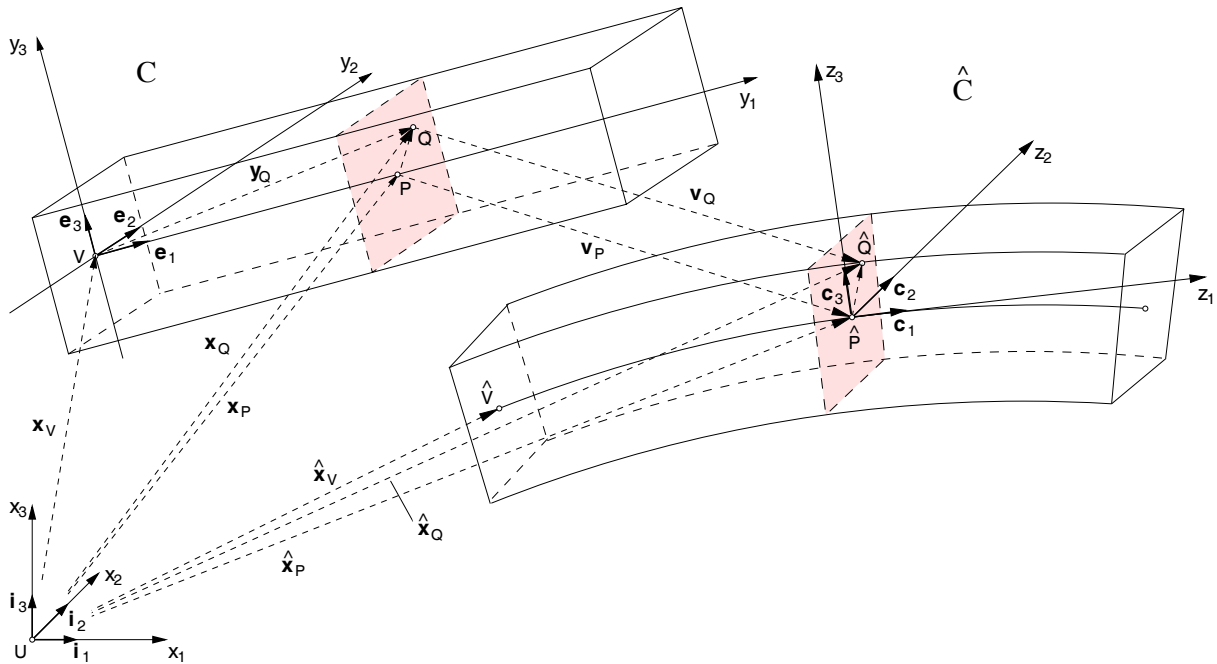


Bild 2: Verschiebungszustand des Stabes

### 1.2.1 Verschiebungszustand

Der Stab wird durch externe Einwirkungen aus der Referenzkonfiguration  $C$  in die Momentankonfiguration  $\hat{C}$  verschoben. Die neue Lage der materiellen Punkte  $Q$  sei  $\hat{Q}$ . Die Koordinaten des Verschiebungsvektors von  $Q$  können wahlweise in der globalen Basis  $\mathbf{I}$  oder in der Stabbasis  $\mathbf{E}$  angegeben werden :

1. globale Basis in globalen Koordinaten, globale Verschiebungskoordinaten

$$u_{1Q}\mathbf{i}_1 + u_{2Q}\mathbf{i}_2 + u_{3Q}\mathbf{i}_3 = \mathbf{I} \mathbf{u}_{(Q)} \quad (11)$$

2. lokale Basis in lokalen Koordinaten, lokale Verschiebungskoordinaten

$$v_{1Q}\mathbf{b}_1 + v_{2Q}\mathbf{b}_2 + v_{3Q}\mathbf{b}_3 = \mathbf{B} \mathbf{v}_{(Q)} \quad (12)$$

3. lokale Basis in globalen Koordinaten, lokale Verschiebungskoordinaten

$$v_{1Q}\mathbf{e}_1 + v_{2Q}\mathbf{e}_2 + v_{3Q}\mathbf{e}_3 = \mathbf{E} \mathbf{v}_{(Q)} \quad (13)$$

Die Koordinaten des Verschiebungsvektors werden im allgemeinen als Funktion der Stabkoordinaten angegeben :

$$\begin{aligned} u_{iQ}(y_1, y_2, y_3) & \text{ globale Koordinaten des Verschiebungsvektors} \\ v_{iQ}(y_1, y_2, y_3) & \text{ Stabkoordinaten des Verschiebungsvektors} \end{aligned}$$

Die Transformationsregel für die Verschiebung folgt aus der Bedingung, daß die Vektoren (11) und (13) im globalen System gleich sind :

$$\mathbf{u}_{(Q)} = \mathbf{E} \mathbf{v}_{(Q)} \quad (14)$$

### 1.2.2 Lokale Basis am Punkt $\hat{Q}$

Der Ortsvektor  $\mathbf{y}_{(\hat{Q})}$  des Punktes  $\hat{Q}$  in der Momentankonfiguration  $\hat{C}$  im Stabkoordinatensystem  $\{V; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ist die Vektorsumme seines Ortsvektors  $\mathbf{y}_{(Q)}$  in der Referenzkonfiguration  $C$  und dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{v}_{(Q)}$  :

$$\mathbf{y}_{(\hat{Q})} = \mathbf{y}_{(Q)} + \mathbf{v}_{(Q)} \quad (15)$$

Die lokalen Basisvektoren  $\mathbf{c}_i$  am Punkt  $\hat{Q}$  werden durch Ableitung des Ortsvektors nach den lokalen Koordinaten bestimmt :

$$\mathbf{c}_i = \frac{\partial \mathbf{y}_{(\hat{Q})}}{\partial y_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Die Stabkoordinaten der lokalen Basisvektoren  $\mathbf{c}_i$  folgen aus (16) durch Substitution der Koordinatenformen (2) für  $\mathbf{y}_{(Q)}$  und (12) für  $\mathbf{v}_{(Q)}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &= \frac{\partial \mathbf{y}_{(Q)}}{\partial y_n} + \frac{\partial \mathbf{v}_{(Q)}}{\partial y_n} \\ &= \mathbf{b}_n + \frac{\partial v_{1Q}}{\partial y_n} \mathbf{b}_1 + \frac{\partial v_{2Q}}{\partial y_n} \mathbf{b}_2 + \frac{\partial v_{3Q}}{\partial y_n} \mathbf{b}_3 \quad n = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

Die vom Verschiebungszustand abhängige Basis  $\mathbf{C}$  variiert von Punkt zu Punkt im Stab. Das lokale Koordinatensystem  $(z_1, z_2, z_3)$  ist daher krummlinig. Die Vektoren  $\mathbf{c}_n$  sind im allgemeinen nicht orthogonal. Aus (17) folgt der Verschiebungszustand  $\mathbf{V}$  in der Stabbasis :

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{V} = \mathbf{I} + \mathbf{V} \quad (18)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial y_1} & \frac{\partial v_3}{\partial y_2} & \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$\mathbf{V}$       Verschiebungsgradient  
 $\mathbf{C}$       Deformationsgradient

Die Beziehung (19) enthält keine Annahmen bezüglich der Größe der Verschiebungen.



## 2 Verschiebungsansatz für Stäbe

### 2.1 Hypothesen von Bernoulli

Der Verschiebungsansatz für Stäbe beruht auf folgenden Hypothesen von Bernoulli :

1. Alle Punkte eines Stabquerschnitts besitzen denselben Drehvektor.
2. Die Flächennormale des Querschnitts in der Referenzkonfiguration  $C$  ist nach der Dehnung normal zum Querschnitt in der Momentankonfiguration  $\hat{C}$ .

Aus den Hypothesen von Bernoulli folgt :

1. (a) Der ebene Stabquerschnitt der Referenzkonfiguration bleibt in der Momentankonfiguration eben.  
(b) Abstände im Querschnitt bleiben bei der Verschiebung aus der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration konstant. Der Querschnitt behält seine Form und seine Abmessungen.
2. Die Tangente der Stabachse der Momentankonfiguration am Achspunkt  $P$  eines Querschnitts ist parallel zur Flächennormale dieses Querschnitts.

### 2.2 Drehmatrix

Aufeinanderfolgende Drehungen um feste Achsen sind nicht kommutativ. Sie eignen sich daher nicht zur Beschreibung der Drehung für einen Stabquerschnitt. Stattdessen wird eine Drehmatrix für die Drehung eines gegebenen Punktes  $P$  um eine gegebene Gerade durch den Winkel  $\theta$  aufgestellt. Die Gerade heißt Drehachse. Ihre Einheitstangente wird mit  $\mathbf{a} := (a_1, a_2, a_3)$  bezeichnet.

Für einen beliebigen Punkt  $U$  der Drehachse sei der Winkel von der Tangente  $\mathbf{a}$  zum Vektor  $\mathbf{p} := \overrightarrow{UP}$  gleich  $\gamma$ . Das Lot vom gegebenen Punkt  $P$  auf den Punkt  $M$  der Drehachse bestimmt den Radius  $r := |\overrightarrow{PM}|$ . Der Einheitsvektor in Richtung von  $P$  nach  $M$  wird mit  $\mathbf{e}$  bezeichnet.

Der Punkt wird um die Achse  $\mathbf{a}$  durch den Winkel  $\theta$  nach  $Q$  gedreht. Gemäß der Definition der Drehung eines Punktes um eine Achse sind die Abstände  $|PM|$  und  $|QM|$  gleich. Damit sind die Dreiecke  $UMP$  und  $UMQ$  kongruent. In der durch die Punkte  $P, M, Q$  aufgespannten Ebene wird das Lot von  $Q$  auf den Punkt  $S$  des Strahls  $\overrightarrow{MP}$  gefällt. Dann gilt :

$$\begin{aligned} |QS| &= r \sin\theta \\ |MS| &= r \cos\theta \\ |PS| &= r (1 - \cos\theta) \end{aligned} \tag{20}$$

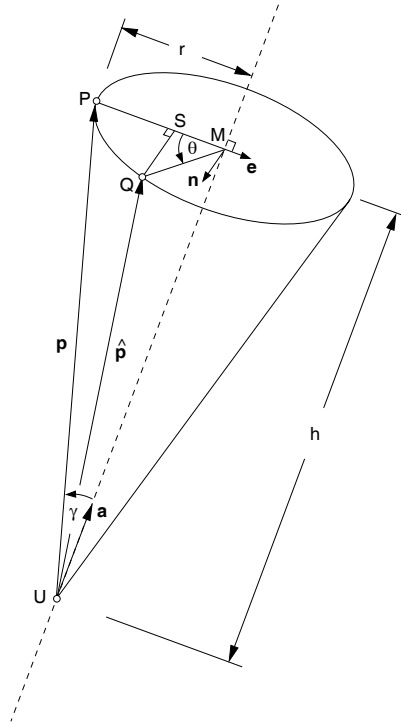


Bild 3: Drehung eines Punktes P um eine gegebene Gerade durch den Winkel  $\theta$

Der Einheitsvektor in Richtung von S nach Q sei  $\mathbf{n}$ . Da das Kreuzprodukt der Vektoren  $\overrightarrow{UM}$  und  $\overrightarrow{UP}$  ein Vektor der Länge  $hr$  in Richtung  $\mathbf{n}$  ist, folgt für  $\mathbf{n}$  :

$$\begin{aligned} h \mathbf{a} \times \mathbf{p} &= hr \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{r} \mathbf{a} \times \mathbf{p} \end{aligned} \quad (21)$$

Der Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  ist das Kreuzprodukt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{p}) \quad (22)$$

Der gedrehte Vektor  $\overrightarrow{UQ}$  wird mit  $\hat{\mathbf{p}}$  bezeichnet und als Summe der Vektoren  $\overrightarrow{UP}$ ,  $\overrightarrow{PS}$ ,  $\overrightarrow{SQ}$  bestimmt :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} + r \mathbf{e} (1 - \cos \theta) + r \mathbf{n} \sin \theta \\ \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} + (1 - \cos \theta) \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{p}) + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{p} \end{aligned} \quad (23)$$

Zur Darstellung in Matrixform wird das Kreuzprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  durch das Produkt einer Matrix

$\mathbf{A}(\mathbf{a})$  mit dem Vektor  $\mathbf{p}$  ersetzt :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 p_3 - a_3 p_2 \\ a_3 p_1 - a_1 p_3 \\ a_1 p_2 - a_2 p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Der Ausdruck (24) wird in (23) eingesetzt :

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \mathbf{p}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{A} \sin \theta + \mathbf{A}^2 (1 - \cos \theta) \quad (25)$$

$\mathbf{R}$  Drehmatrix für Achse  $\mathbf{a}$

### 2.2.1 Kontrolle der Drehmatrix

Die Drehmatrix ist infolge ihrer Konstruktion orthonormal :

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (26)$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (27)$$

Im folgenden wird gezeigt, daß die Drehmatrix (25) die Gleichung (27) befriedigt. Dabei wird die Eigenschaft  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$  genutzt.

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{A} \sin \theta + \mathbf{A}^2 (1 - \cos \theta)$$

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{I} - \mathbf{A} \sin \theta + \mathbf{A}^2 (1 - \cos \theta)$$

---


$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \mathbf{A} \sin \theta + \mathbf{A}^2 (1 - \cos \theta) \\ &\quad - \mathbf{A} \sin \theta - \mathbf{A}^2 \sin^2 \theta - \mathbf{A}^3 \sin \theta (1 - \cos \theta) \\ &\quad + \mathbf{A}^2 (1 - \cos \theta) + \mathbf{A}^3 \sin \theta (1 - \cos \theta) + \mathbf{A}^4 (1 - \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (28)$$


---

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^2 (1 - \cos \theta)^2 + \mathbf{A}^4 (1 - \cos \theta)^2 \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^2 (\mathbf{I} + \mathbf{A}^2) (1 - \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  in (24) wird in den Term  $\mathbf{I} + \mathbf{A}^2$  substituiert :

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2^2 - a_3^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}$$

Mit der Beziehung  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  für den Einheitsvektor  $\mathbf{a}$  folgt :

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \mathbf{a}^T \quad (30)$$

Die Substitution von (30) in (28) führt mit  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1$  zu (27) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \mathbf{I} + (1 - \cos \theta)^2 (\mathbf{a} \mathbf{a}^T - \mathbf{I}) \mathbf{a} \mathbf{a}^T \\ &= \mathbf{I} + (1 - \cos \theta)^2 (\mathbf{a} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{a}^T) \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (31)$$

### 2.2.2 Quadratische Approximation der Drehmatrix

Die Drehmatrix wird mit einer quadratischen Funktion des Drehwinkels approximiert. Dazu werden die trigonometrischen Funktionen durch Reihen ersetzt :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots \\ \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Die Approximation  $\sin \theta = \theta$  und  $\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2$  werden in (25) eingesetzt :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \theta \mathbf{A} + \frac{1}{2} \theta^2 \mathbf{A}^2 \quad (33)$$

Der Richtungsvektor  $\mathbf{a}$  der Drehachse wird durch den Drehvektor  $\boldsymbol{\theta}$  ersetzt :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \theta a_1 \\ \theta a_2 \\ \theta a_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Die Approximation (33) der Drehmatrix erhält mit (34) folgende Form :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^2 \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^2 &= \begin{bmatrix} -\theta_2^2 - \theta_3^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_2\theta_1 & -\theta_3^2 - \theta_1^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_3\theta_1 & \theta_3\theta_2 & -\theta_1^2 - \theta_2^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R} &= \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{35}$$

### 2.2.3 Drehverschiebung eines Punktes

Die Verschiebung  $\mathbf{v}_\theta$  eines Punktes infolge einer Drehung durch den Winkel  $\theta$  um eine Achse  $\mathbf{a}$  folgt aus der Beziehung (25) zwischen seinen Ortsvektoren vor und nach der Drehung :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_\theta &= \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p} = (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{p} \\
 \mathbf{v}_\theta &= \mathbf{T}_\theta \mathbf{p} \\
 \mathbf{T}_\theta &= \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^2 \\
 \mathbf{T}_\theta &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 & -\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 & \theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 \\ \theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 & -\frac{1}{2}\theta_3^2 - \frac{1}{2}\theta_1^2 & -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \\ -\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 & \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{36}$$

## 2.3 Verschiebungsansatz

Gegeben sei ein Punkt  $Q$  des Stabquerschnitts mit Achspunkt  $P$  in der Referenzkonfiguration. Wegen der Bernoulli-Hypothese 2.1 ist die Verschiebung von  $Q$  in seine Momentanlage  $\hat{Q}$  die Vektorsumme der Translation  $\mathbf{v}_P$  des Achspunktes und der Drehverschiebung  $\mathbf{v}_\theta$  von  $Q$  für einen Drehvektor  $\boldsymbol{\theta}$  durch  $P$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{(Q)} &= \mathbf{v}_{(P)} + \mathbf{T}_\theta \mathbf{y} \\
 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_Q &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{37}$$

- $y_1$  Stabkoordinate des Achspunktes P
- $y_2, y_3$  Stabkoordinaten von Q im Querschnitt durch P

Die Koordinaten  $v_i$  des Verschiebungsvektors  $\mathbf{v}_P$  und die Koordinaten  $t_{im}$  der Drehverschiebungsmatrix  $\mathbf{T}_\theta$  sind Funktionen der Achskoordinate  $y_1$ ; sie sind unabhängig von den Koordinaten  $y_2$  und  $y_3$ .

$$\begin{aligned} v_i(y_1) & \text{ Koordinaten der Achsverschiebung } \mathbf{v}_P \\ t_{im}(y_1) & \text{ Koordinaten der Drehverschiebungsmatrix } \mathbf{T}_\theta \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz (37) sind die Basisvektoren  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_3$  gleich den Richtungsvektoren  $\mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_3$  in der Drehmatrix  $\mathbf{R}$  in (35). Aus (17) und (36) folgt :

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \mathbf{y}_Q}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathbf{v}_Q}{\partial y_2} = \mathbf{i}_2 + (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y_2} = \mathbf{i}_2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{i}_2 \quad (38)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\partial \mathbf{y}_Q}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{v}_Q}{\partial y_3} = \mathbf{i}_3 + (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y_3} = \mathbf{i}_3 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{i}_3 \quad (39)$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{r}_3$$

Der lokale Basisvektor  $\mathbf{c}_1$  ist nicht gleich  $\mathbf{r}_1$  :

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \mathbf{y}_Q}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathbf{v}_P}{\partial y_1} + (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y_1} = \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \mathbf{v}_P}{\partial y_1} \quad (40)$$

**Notation :** In den folgenden Abschnitten werden bei der Auswertung von Produkten alle Terme vernachlässigt, die kubisch oder höher in den Drehkoordinaten  $\theta_i$  und den Verschiebungsableitungen  $v_{i,k}$  oder  $v_{i,km}$  sind. Diese Vereinfachung der nachfolgenden Formulierungen wird durch das Zeichen  $\doteq$  angezeigt.

### 2.3.1 Zweite Bernoulli-Hypothese

Der Ansatz (37) befriedigt im allgemeinen nicht die 2. Bernoulli-Hypothese, da die Normale des verschobenen Querschnitts nicht festgelegt ist. Die Koordinaten  $\theta_2$  und  $\theta_3$  der Drehmatrix werden im folgenden so bestimmt, daß der lokale Basisvektor  $\mathbf{c}_1$  in (15) parallel zum Richtungsvektor  $\mathbf{r}_1$  der Drehmatrix  $\mathbf{R}$  in Gleichung (35) ist.

Die Vektoren  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{r}_1$  sind parallel, wenn  $\mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_3$  orthogonal zu  $\mathbf{c}_1$  stehen, da die Matrix  $\mathbf{R}$  orthonormal ist. Diese Bedingungen liefern die beiden Gleichungen zur Bestimmung von  $\theta_2$  und  $\theta_3$  als Funktionen der Variablen  $\theta_1, v_{2,1}$  und  $v_{3,1}$ . Der lokale Basisvektor  $\mathbf{c}_1$  folgt aus (40) :

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 + v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Die Bedingung  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{r}_2 = 0$  führt zu folgender Gleichung :

$$(1 + v_{1,1})(-\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2) + v_{2,1}(1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2)) + v_{3,1}(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3) = 0 \quad (42)$$

$$\frac{1}{2}\theta_1\theta_2 - (1 + v_{1,1})\theta_3 + v_{2,1} + v_{3,1}\theta_1 = 0 \quad (43)$$

Die Bedingung  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{r}_3 = 0$  führt zu folgender Gleichung :

$$(1 + v_{1,1})(\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3) + v_{2,1}(-\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3) + v_{3,1}(1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2)) = 0 \quad (44)$$

$$(1 + v_{1,1})\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 + v_{3,1} - v_{2,1}\theta_1 = 0 \quad (45)$$

Die Gleichungen (39) und (40) werden in Matrix-Vektornotation dargestellt :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\theta_1 & 1 + v_{1,1} \\ 1 + v_{1,1} & \frac{1}{2}\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2,1} + \theta_1 v_{3,1} \\ -v_{3,1} + \theta_1 v_{2,1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

In der Determinante der Koeffizientenmatrix von (46) werden quadratische und höhere Terme in  $\theta_1$  und  $v_{1,1}$  im Vergleich zu 1 vernachlässigt :

$$\frac{1}{(1 + v_{1,1})^2 + (\frac{1}{2}\theta_1)^2} \cong \frac{1}{1 + 2v_{1,1}} \cong 1 - 2v_{1,1} \quad (47)$$

Für die Koordinaten  $\theta_2$  und  $\theta_3$  der Drehmatrix folgt mit (46) :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= (1 - 2v_{1,1})\{(1 + v_{1,1})(-v_{3,1} + \theta_1 v_{2,1}) - \frac{1}{2}\theta_1(v_{2,1} + \theta_1 v_{3,1})\} \\ &= (1 - 2v_{1,1})(\frac{1}{2} + v_{1,1})\theta_1 v_{2,1} - (1 - 2v_{1,1})(1 + v_{1,1} + \frac{1}{2}\theta_1^2)v_{3,1} \\ \theta_2 &\doteq \frac{1}{2}\theta_1 v_{2,1} - (1 - v_{1,1})v_{3,1} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= (1 - 2v_{1,1})\{(1 + v_{1,1})(v_{2,1} + \theta_1 v_{3,1}) + \frac{1}{2}\theta_1(-v_{3,1} + \theta_1 v_{2,1})\} \\ &= (1 - 2v_{1,1})(1 + v_{1,1} + \frac{1}{2}\theta_1^2)v_{2,1} + (1 - 2v_{1,1})(\frac{1}{2} + v_{1,1})\theta_1 v_{3,1} \\ \theta_3 &\doteq \frac{1}{2}\theta_1 v_{3,1} + (1 - v_{1,1})v_{2,1} \end{aligned} \quad (49)$$

### 2.3.2 Koeffizienten der Drehverschiebungsmatrix

Die Ausdrücke (48) und (49) für die Drehkoordinaten  $\theta_2$  und  $\theta_3$  werden in die Gleichung (36) eingesetzt. Die Koeffizienten  $t_{im}$  der Drehverschiebungsmatrix  $\mathbf{T}_\theta$  lassen sich damit wie folgt bestimmen :

$$t_{11} = -\frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_3^2) \doteq -\frac{1}{2}(v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} t_{21} &= \theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 \doteq (1 - v_{1,1})v_{2,1} + \frac{1}{2}(\theta_1v_{3,1} - \theta_1v_{3,1}) \\ &= (1 - v_{1,1})v_{2,1} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} t_{31} &= -\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 \doteq (1 - v_{1,1})v_{3,1} + \frac{1}{2}(\theta_1v_{2,1} - \theta_1v_{2,1}) \\ &= (1 - v_{1,1})v_{3,1} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} t_{12} &= -\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 \doteq -(1 - v_{1,1})v_{2,1} - \frac{1}{2}(\theta_1v_{3,1} + \theta_1v_{3,1}) \\ &= -(1 - v_{1,1})v_{2,1} - \theta_1v_{3,1} \end{aligned} \quad (53)$$

$$t_{22} = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) \doteq -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + v_{2,1}^2) \quad (54)$$

$$t_{32} = \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \doteq \theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} t_{13} &= \theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 \doteq -(1 - v_{1,1})v_{3,1} + \frac{1}{2}(\theta_1v_{2,1} + \theta_1v_{2,1}) \\ &= -(1 - v_{1,1})v_{3,1} + \theta_1v_{2,1} \end{aligned} \quad (56)$$

$$t_{23} = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \doteq -\theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1} \quad (57)$$

$$t_{33} = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) \doteq -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + v_{3,1}^2) \quad (58)$$

### 2.3.3 Ableitungen der Koeffizienten der Drehverschiebungsmatrix

Für die Bestimmung des Dehnungszustandes wird die Ableitung des Verschiebungsansatzes (37) nach den Koordinaten  $y_i$  benötigt. Im folgenden sind die Ableitungen der Koeffizienten der Drehverschiebungsmatrix zusammengestellt. Die Koeffizienten  $t_{im}$  sind nur Funktionen der Stablängskoordinate  $y_1$ .

$$t_{11,1} = -v_{2,1}v_{2,11} - v_{3,1}v_{3,11} \quad (59)$$

$$t_{21,1} = (1 - v_{1,1})v_{2,11} - v_{2,1}v_{1,11} \quad (60)$$

$$t_{31,1} = (1 - v_{1,1})v_{3,11} - v_{3,1}v_{1,11} \quad (61)$$



$$t_{12,1} = -(1 - v_{1,1})v_{2,11} + v_{2,1}v_{1,11} - \theta_{1,1}v_{3,1} - \theta_1v_{3,11} \quad (62)$$

$$t_{22,1} = -\theta_1\theta_{1,1} - v_{2,1}v_{2,11} \quad (63)$$

$$t_{32,1} = \theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{2,11}v_{3,1}) \quad (64)$$

$$t_{13,1} = -(1 - v_{1,1})v_{3,11} + v_{3,1}v_{1,11} + \theta_{1,1}v_{2,1} + \theta_1v_{2,11} \quad (65)$$

$$t_{23,1} = -\theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{2,11}v_{3,1}) \quad (66)$$

$$t_{33,1} = -\theta_1\theta_{1,1} - v_{3,1}v_{3,11} \quad (67)$$

### 2.3.4 Ableitungen des Verschiebungsansatzes

Mit den Gleichungen aus (50) bis (58) und (59) bis (67) folgt die Ableitung des Verschiebungsansatzes (37) :

$$v_{1,1(Q)} = v_{1,1} + y_2t_{12,1} + y_3t_{13,1} \quad (68)$$

$$v_{2,1(Q)} = v_{2,1} + y_2t_{22,1} + y_3t_{23,1} \quad (69)$$

$$v_{3,1(Q)} = v_{3,1} + y_2t_{32,1} + y_3t_{33,1} \quad (70)$$

$$v_{1,2(Q)} = t_{12} \quad (71)$$

$$v_{2,2(Q)} = t_{22} \quad (72)$$

$$v_{3,2(Q)} = t_{32} \quad (73)$$

$$v_{1,3(Q)} = t_{13} \quad (74)$$

$$v_{2,3(Q)} = t_{23} \quad (75)$$

$$v_{3,3(Q)} = t_{33} \quad (76)$$

Für die Bestimmung der Quadrate der Verschiebungsableitungen werden mit  $y_2^2$  oder  $y_3^2$  multiplizierte Terme vernachlässigt :

$$v_{1,1(Q)}^2 \doteq v_{1,1}^2 + 2y_2v_{1,1}t_{12,1} + 2y_3v_{1,1}t_{13,1} + 2y_2y_3t_{12,1}t_{13,1} \quad (77)$$

$$v_{2,1(Q)}^2 \doteq v_{2,1}^2 + 2y_2v_{2,1}t_{22,1} + 2y_3v_{2,1}t_{23,1} + 2y_2y_3t_{22,1}t_{23,1} \quad (78)$$

$$v_{3,1(Q)}^2 \doteq v_{3,1}^2 + 2y_2v_{3,1}t_{32,1} + 2y_3v_{3,1}t_{33,1} + 2y_2y_3t_{32,1}t_{33,1} \quad (79)$$

$$v_{1,1(Q)}v_{1,2(Q)} \doteq v_{1,1}t_{12} + y_2t_{12}t_{12,1} + y_3t_{12}t_{13,1} \quad (80)$$

$$v_{1,1(Q)}v_{1,3(Q)} \doteq v_{1,1}t_{13} + y_2t_{13}t_{12,1} + y_3t_{13}t_{13,1} \quad (81)$$

$$v_{2,1(Q)}v_{2,2(Q)} \doteq v_{2,1}t_{22} + y_2t_{22}t_{22,1} + y_3t_{22}t_{23,1} \quad (82)$$

$$v_{2,1(Q)}v_{2,3(Q)} \doteq v_{2,1}t_{23} + y_2t_{23}t_{22,1} + y_3t_{23}t_{23,1} \quad (83)$$

$$v_{3,1(Q)}v_{3,2(Q)} \doteq v_{3,1}t_{32} + y_2t_{32}t_{32,1} + y_3t_{32}t_{33,1} \quad (84)$$

$$v_{3,1(Q)}v_{3,3(Q)} \doteq v_{3,1}t_{33} + y_2t_{33}t_{32,1} + y_3t_{33}t_{33,1} \quad (85)$$

### 2.3.5 Substitution der Drehverschiebungskoeffizienten

Die Koeffizienten (50) bis (58) der Drehverschiebungsmatrix und ihre Ableitungen (59) bis (67) werden in die Ableitungen der Verschiebungskordinaten (68) bis (85) eingesetzt :

$$\begin{aligned} v_{1,1(Q)} &= v_{1,1} - y_2((1 - v_{1,1})v_{2,11} - v_{2,1}v_{1,11} + \theta_{1,1}v_{3,1} + \theta_1v_{3,11}) \\ &\quad - y_3((1 - v_{1,1})v_{3,11} - v_{3,1}v_{1,11} - \theta_{1,1}v_{2,1} - \theta_1v_{2,11}) \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} v_{2,1(Q)} &= v_{2,1} - y_2(\theta_1\theta_{1,1} + v_{2,1}v_{2,11}) \\ &\quad - y_3(\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{2,11}v_{3,1})) \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} v_{3,1(Q)} &= v_{3,1} - y_2(-\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{2,11}v_{3,1})) \\ &\quad - y_3(\theta_1\theta_{1,1} + v_{3,1}v_{3,11}) \end{aligned} \quad (88)$$

$$v_{1,2(Q)} = -(1 - v_{1,1})v_{2,1} - \theta_1v_{3,1} \quad (89)$$

$$v_{2,2(Q)} = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + v_{2,1}^2) \quad (90)$$

$$v_{3,2(Q)} = \theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1} \quad (91)$$

$$v_{1,3(Q)} = -(1 - v_{1,1})v_{3,1} + \theta_1v_{2,1} \quad (92)$$

$$v_{2,3(Q)} = -\theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1} \quad (93)$$

$$v_{3,3(Q)} = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + v_{3,1}^2) \quad (94)$$

$$v_{1,1}^2(Q) \doteq v_{1,1}^2 - 2y_2v_{1,1}v_{2,11} - 2y_3v_{1,1}v_{3,11} \quad (95)$$

$$v_{2,1}^2(Q) \doteq v_{2,1}^2 - 2y_3v_{2,1}\theta_{1,1} \quad (96)$$

$$v_{3,1}^2(Q) \doteq v_{3,1}^2 + 2y_2v_{3,1}\theta_{1,1} \quad (97)$$

$$v_{1,1}(Q)v_{1,2}(Q) \doteq -v_{1,1}v_{2,1} + y_2v_{2,1}v_{2,11} + y_3v_{2,1}v_{3,11} \quad (98)$$

$$v_{1,1}(Q)v_{1,3}(Q) \doteq -v_{1,1}v_{3,1} + y_2v_{3,1}v_{2,11} + y_3v_{3,1}v_{3,11} \quad (99)$$

$$v_{2,1}(Q)v_{2,2}(Q) \doteq 0 \quad (100)$$

$$v_{2,1}(Q)v_{2,3}(Q) \doteq -v_{2,1}\theta_1 + y_3\theta_1\theta_{1,1} \quad (101)$$

$$v_{3,1}(Q)v_{3,2}(Q) \doteq v_{3,1}\theta_1 + y_2\theta_1\theta_{1,1} \quad (102)$$

$$v_{3,1}(Q)v_{3,3}(Q) \doteq 0 \quad (103)$$

### 3 Dehnungszustand des Stabes

#### 3.1 Dehnungstensor

Gegeben sei ein infinitesimales Quaderelement des Stabes in der Referenzkonfiguration  $C$ , dessen Kanten parallel zu den Stabachsen  $y_1, y_2, y_3$  sind. Die Kantenlängen des Quaders seien  $dy_i$ . Dann ist die Diagonale des Elementes im Stabkoordinatensystem der Vektor :

$$d\mathbf{y} = \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} \quad (104)$$

In der Momentankonfiguration  $\hat{C}$  werden die materiellen Punkte der Elementendiagonalen weiterhin mit  $d\mathbf{y}$  bezeichnet. Sie belegen jetzt den Vektor  $d\hat{\mathbf{y}}$  mit den Stabkoordinaten  $d\hat{y}_i$ . Aus der Definition (16) der lokalen Basis folgt mit dem Verschiebungsgradienten  $\mathbf{V}$  (19) :

$$d\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} d\mathbf{y} = (\mathbf{I} + \mathbf{V}) d\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} d\hat{y}_1 \\ d\hat{y}_2 \\ d\hat{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} \quad (105)$$

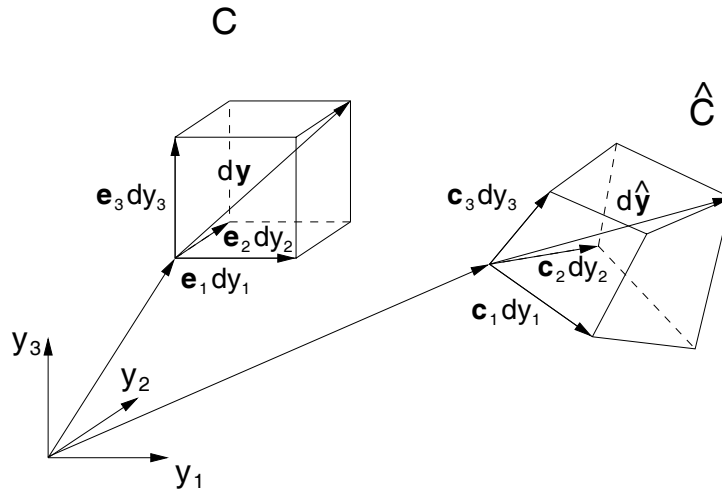


Bild 4: Infinitesimales Quaderelement in den Konfigurationen  $C$  und  $\hat{C}$

Die Änderung im Quadrat der Diagonallänge bei der Verschiebung von der Referenzkonfiguration  $C$  in die Momentankonfiguration  $\hat{C}$  wird bestimmt :

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{y}}^T d\hat{\mathbf{y}} - d\mathbf{y}^T d\mathbf{y} &= d\mathbf{y}^T (\mathbf{I}^T + \mathbf{V}^T) (\mathbf{I} + \mathbf{V}) d\mathbf{y} - d\mathbf{y}^T d\mathbf{y} \\ &= d\mathbf{y}^T (\mathbf{V} + \mathbf{V}^T + \mathbf{V}^T \mathbf{V}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (106)$$

Der Dehnungstensor  $\mathbf{E}_y$  wird in der üblichen Form definiert :

$$\mathbf{E}_y = \frac{1}{2}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^T + \mathbf{V}^T\mathbf{V}) \quad (107)$$

### 3.2 Dehnungstensorkoordinaten

Die Koordinaten des Dehnungstensors  $\mathbf{E}_y$  werden durch Substitution der Ableitungen (86) bis (103) des Verschiebungsansatzes in der Definition (107) bestimmt. Die Tensorkoordinaten  $e_{12}$  und  $e_{13}$  werden durch die Ingenieurkoordinaten  $\epsilon_{12} = 2e_{12}$  und  $\epsilon_{13} = 2e_{13}$  ersetzt.

$$\begin{aligned} \epsilon_{11(Q)} &= \left\{ v_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) \right\}_Q \\ &= v_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) \\ &\quad - y_2 \{ (1 - v_{1,1})v_{2,11} - v_{2,1}v_{1,11} + \theta_1 v_{3,11} + \theta_{1,1}v_{3,1} + v_{1,1}v_{2,11} - v_{3,1}\theta_{1,1} \} \\ &\quad - y_3 \{ (1 - v_{1,1})v_{3,11} - v_{3,1}v_{1,11} - \theta_1 v_{2,11} - \theta_{1,1}v_{2,1} + v_{1,1}v_{3,11} - v_{2,1}\theta_{1,1} \} \quad (108) \\ \epsilon_{11(Q)} &= v_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) - y_2(v_{2,11} - v_{2,1}v_{1,11} + \theta_1 v_{3,11}) \\ &\quad - y_3(v_{3,11} - v_{3,1}v_{1,11} - \theta_1 v_{2,11}) \end{aligned}$$

Für kleine Dehnungen  $v_{1,1}$  der Stabachse werden die Terme  $v_1^2$ ,  $v_{2,1}v_{1,11}$  und  $v_{3,1}v_{1,11}$  vernachlässigt.

$$\boxed{\epsilon_{11(Q)} = v_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) - y_2(v_{2,11} + \theta_1 v_{3,11}) - y_3(v_{3,11} - \theta_1 v_{2,11})} \quad (109)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{12(Q)} &= \{v_{1,2} + v_{2,1} + v_{1,1}v_{1,2} + v_{2,1}v_{2,2} + v_{3,1}v_{3,2}\}_Q \\
&= \{(1 + v_{1,1})v_{1,2} + (1 + v_{2,2})v_{2,1} + v_{3,1}v_{3,2}\}_Q \\
&= \{-(1 - v_{1,1}v_{2,1} - \theta_1v_{3,1}) \cdot \\
&\quad \{1 + v_{1,1} - y_2((1 - v_{1,1})v_{2,11} - v_{2,1}v_{1,11} + \theta_1v_{3,11} + \theta_{1,1}v_{3,1}) \\
&\quad \quad - y_3((1 - v_{1,1})v_{3,11} - v_{3,1}v_{1,11} - \theta_1v_{2,11} - \theta_{1,1}v_{2,1})\} \\
&\quad + \{1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 - v_{2,1}^2)\} \cdot \{v_{2,1} - y_2(\theta_1\theta_{1,1} + v_{2,1}v_{2,11}) \\
&\quad \quad - y_3(\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{3,1}v_{2,11}))\} \\
&\quad + \{\theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1}\} \cdot \{v_{3,1} - y_2(\frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{3,1}v_{2,11}) - \theta_{1,1}) \\
&\quad \quad - y_3(\theta_1\theta_{1,1} + v_{3,1}v_{3,11})\} \\
&\doteq v_{2,1}\{1 - (1 - v_{1,1})(1 + v_{1,1}) - \theta_1v_{3,1} + \theta_{1,1}v_{3,1}\} \\
&\quad - y_2\{-(1 - v_{1,1})^2v_{2,1}v_{2,11} + \theta_1\theta_{1,1} + v_{2,1}v_{2,11} - \theta_1\theta_{1,1}\} \\
&\quad - y_3\{-(1 - v_{1,1})^2v_{2,1}v_{3,11} + \theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{3,1}v_{2,11})\}
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\boxed{\epsilon_{12(Q)} \doteq -y_3(\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{3,1}v_{2,11} - v_{2,1}v_{3,11}))} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{13(Q)} &= \{v_{1,3} + v_{3,1} + v_{1,1}v_{1,3} + v_{2,1}v_{2,3} + v_{3,1}v_{3,3}\}_Q \\
&= \{(1 + v_{1,1})v_{1,3} + (1 + v_{3,3})v_{3,1} + v_{2,1}v_{2,3}\}_Q \\
&= \{-(1 - v_{1,1}v_{3,1} + \theta_1v_{2,1}) \cdot \\
&\quad \{1 + v_{1,1} - y_2((1 - v_{1,1})v_{2,11} - v_{2,1}v_{1,11} + \theta_1v_{3,11} + \theta_{1,1}v_{3,1}) \\
&\quad \quad - y_3((1 - v_{1,1})v_{3,11} - v_{3,1}v_{1,11} - \theta_1v_{2,11} - \theta_{1,1}v_{2,1})\} \\
&\quad + \{1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 - v_{3,1}^2)\} \cdot \{v_{3,1} - y_2(\frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{3,1}v_{2,11}) - \theta_{1,1}) \\
&\quad \quad - y_3(\theta_1\theta_{1,1} + v_{3,1}v_{3,11})\} \\
&\quad + \{-\theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1}\} \cdot \{v_{2,1} - y_2(\theta_1\theta_{1,1} + v_{2,1}v_{2,11}) \\
&\quad \quad - y_3(\frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{3,1}v_{2,11}) + \theta_{1,1})\} \\
&\doteq v_{3,1}\{1 - (1 - v_{1,1})(1 + v_{1,1}) + \theta_1v_{2,1} + \theta_{1,1}v_{2,1}\} \\
&\quad - y_2\{-(1 - v_{1,1})^2v_{3,1}v_{2,11} + \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,11} + v_{3,1}v_{2,11} - \theta_{1,1})\} \\
&\quad - y_3\{-(1 - v_{1,1})^2v_{3,1}v_{3,11} + \theta_1\theta_{1,1} + v_{3,1}v_{3,11} - \theta_1\theta_{1,1}\}
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\boxed{\epsilon_{13(Q)} \doteq y_2(\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{3,1}v_{2,11} - v_{2,1}v_{3,11}))} \tag{113}$$

**Notation :** Die Darstellung der Dehnungs- und Spannungskordinaten wird im folgenden nach Termen gegliedert, die sich auf die lokalen Koordinatenachsen  $y_1, y_2, y_3$  beziehen. Die Zugehörigkeit der einzelnen Terme ist jeweils durch die Indizes (1), (2), (3) angezeigt.

Der Dehnungszustand am Punkt  $Q$  wird mit den Gleichungen (109), (111) und (113) beschrieben.

$$\epsilon_{(Q)} = \epsilon_{(1)} + y_2 \epsilon_{(2)} + y_3 \epsilon_{(3)} \quad (114)$$

$$\epsilon_{(Q)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11(Q)} \\ \epsilon_{12(Q)} \\ \epsilon_{13(Q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11(1)} \\ \epsilon_{12(1)} \\ \epsilon_{13(1)} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} \epsilon_{11(2)} \\ \epsilon_{12(2)} \\ \epsilon_{13(2)} \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} \epsilon_{11(3)} \\ \epsilon_{12(3)} \\ \epsilon_{13(3)} \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11(1)} \\ \epsilon_{12(1)} \\ \epsilon_{13(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11(2)} \\ \epsilon_{12(2)} \\ \epsilon_{13(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(v_{2,11} + \theta_1 v_{3,11}) \\ 0 \\ \theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{3,1} v_{2,11} - v_{2,1} v_{3,11}) \end{bmatrix} \quad (117)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11(3)} \\ \epsilon_{12(3)} \\ \epsilon_{13(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 v_{2,11} - v_{3,11} \\ -(\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{3,1} v_{2,11} - v_{2,1} v_{3,11})) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (118)$$

- $\epsilon_{11(1)}$  linearer und nichtlinearer Dehnungsanteil aus Normaldehnung
- $\epsilon_{11(2)}$  nichtlinearer Normaldehnungsbeitrag aus Biegung um  $y_2$
- $\epsilon_{11(3)}$  nichtlinearer Normaldehnungsbeitrag aus Biegung um  $y_3$
- $\epsilon_{13(2)}$  Schubdehnungsanteil in Richtung  $y_2$  aus Torsion (s. 3.3)
- $\epsilon_{12(3)}$  Schubdehnungsanteil in Richtung  $y_3$  aus Torsion (s. 3.3)

### 3.3 Drillung der Stabachse

Die Drillung der Stabachse setzt sich zusammen aus der Drillung infolge des Ansatzes für die Drehung  $\theta_1$  und der Drillung infolge der Ansätze für die Verschiebungskoordinaten  $v_2$  und  $v_3$ . Die beiden Anteile werden gleichzeitig erfaßt, indem die Drehung der lokalen Basisvektoren  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_3$  betrachtet wird. Da die Basisvektoren  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_3$  an jedem Punkt der Stabachse orthogonal sind, kann wahlweise  $\mathbf{c}_2$  oder  $\mathbf{c}_3$  zur Bestimmung der Drillung benutzt werden.

Der lokale Basisvektor  $\mathbf{c}_2$  am Punkt  $y_1$  der Stabachse folgt aus (36) bis (38) und (50) bis (58). Bei Vernachlässigung des Faktors  $(1 - v_{1,1})$  gilt :

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -v_{2,1} - \theta_1 v_{3,1} \\ 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + v_{2,1}^2) \\ \theta_1 - \frac{1}{2}v_{2,1}v_{3,1} \end{bmatrix} \quad (119)$$

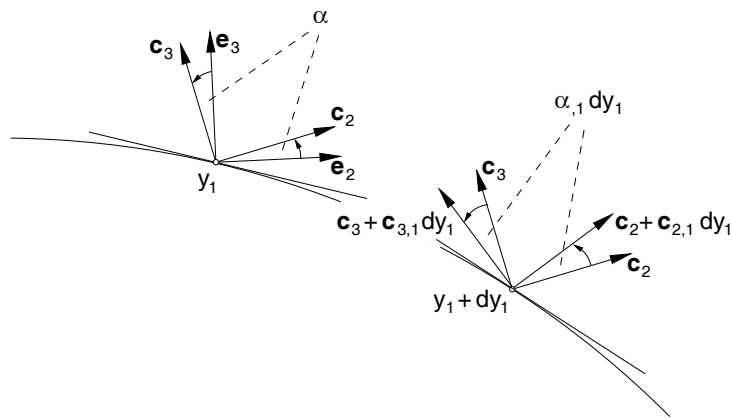


Bild 5: Drillung der Stabachse

Der Winkel von der Stabachse  $\mathbf{e}_2$  zur lokalen Achse  $\mathbf{c}_2$  sei  $\alpha$ . Dann ist die Änderung dieses Winkels von Punkt  $y_1$  zum Punkt  $y_1 + dy_1$  der Stabachse gleich  $\alpha_{,1} dy_1$ . Der lokale Vektor am Punkt  $y_1 + dy_1$  ist  $\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_{2,1} dy_1$ . Der Vektor  $\mathbf{c}_{2,1}$  wird durch Ableitung der Koordinaten in (119) bestimmt :

$$\mathbf{c}_{2,1} = \begin{bmatrix} -v_{2,11} - \theta_{1,1} v_{3,1} - \theta_1 v_{3,11} \\ -\theta_1 \theta_{1,1} + v_{2,1} v_{2,11} \\ \theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,1} v_{3,11} + v_{2,11} v_{3,1}) \end{bmatrix} \quad (120)$$

Das Kreuzprodukt der lokalen Basisvektoren  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_{2,1} dy_1$  wird mit der Beziehung  $\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$  vereinfacht :

$$\mathbf{c}_2 \times (\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_{2,1} dy_1) = \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_{2,1} dy_1 \quad (121)$$



Aus (119) und (120) folgt :

$$\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_{2,1} dy_1 \doteq \begin{bmatrix} \theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,1}v_{3,1} + v_{3,1}v_{2,11}) \\ v_{2,1} - \theta_1 v_{2,11} \\ v_{2,11} + \theta_{1,1}v_{3,1} + \theta_1 v_{3,11} \end{bmatrix} \quad (122)$$

Der an die Stabachse tangente Basisvektor  $\mathbf{c}_1$  folgt aus (50) bis (58) :

$$\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_{2,1} dy_1 \doteq \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{bmatrix} \quad (123)$$

Im Limit  $dy_1 \rightarrow 0$  ist  $\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_{2,1}dy_1$  ein Einheitsvektor und  $\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_{2,1}$  parallel zu  $\mathbf{c}_1$ . Folglich gilt mit  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_1 \doteq 1$  :

$$\mathbf{c}_1 \sin(\alpha_{,1} dy_1) \doteq \mathbf{c}_2 \times (\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_{2,1} dy_1) \quad (124)$$

Für die Drillung  $\alpha_{,1}$  der Stabschse ergibt sich damit :

$$\begin{aligned} \alpha_{,1} &= \mathbf{c}_1^T (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_{2,1}) \\ \alpha_{,1} &\doteq \theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{3,1}v_{2,11} - v_{2,1}v_{3,11}) \end{aligned} \quad (125)$$

## 4 Spannungszustand des Stabes

### 4.1 Materialgesetz

Der Spannungszustand des Stabes wird mit Hilfe des Stoffgesetzes für isotropes, linear elastisches Material berechnet. Die symmetrischen Tensorkoordinaten des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors werden im folgenden vektoriell dargestellt :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (126)$$

Die Querdehnungszahl  $\nu$  ist mit den Annahmen aus 2.1 gleich null. Damit ergibt sich folgendes Stoffgesetz für den Spannungszustand des Stabes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (127)$$

### 4.2 Spannungszustand

Der Spannungszustand an beliebiger Stelle im Element wird durch Substitution der Gleichungen (109),(111) und (113) in das Stoffgesetz (126) bestimmt :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{(1)} + y_2 \boldsymbol{\sigma}_{(3)} + y_3 \boldsymbol{\sigma}_{(3)} \quad (128)$$

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11} = s_{11(1)} + y_2 s_{11(2)} + y_3 s_{11(3)} \quad (129)$$

$$\sigma_{12} = G \epsilon_{12} = y_3 s_{12(3)} \quad (130)$$

$$\sigma_{13} = G \epsilon_{13} = y_2 s_{13(2)} \quad (131)$$

Substitution der Dehnungen liefert folgende Spannungskomponenten :

$$\begin{aligned} s_{11(1)} &= E \cdot \left( v_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2) \right) && \text{Normalspannungsanteil} \\ s_{11(2)} &= E \cdot \left( -v_{2,11} - \theta_1 v_{3,11} \right) && \text{Biegespannungsanteil} \\ s_{11(3)} &= E \cdot \left( \theta_1 v_{2,11} - v_{3,11} \right) && \text{Biegespannungsanteil} \\ s_{12(3)} &= G \cdot \left( -\theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,1} v_{3,11} - v_{3,1} v_{2,11}) \right) && \text{Torsionsschubspannungsanteil} \\ &= G \cdot \left( -\alpha_{,1} \right) \\ s_{13(2)} &= G \cdot \left( \theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{3,1} v_{2,11} - v_{2,1} v_{3,11}) \right) && \text{Torsionsschubspannungsanteil} \\ &= G \cdot \alpha_{,1} \end{aligned}$$

### 4.3 Schubspannungen

Die Schubspannungen  $\sigma_{12}, \sigma_{13}$  werden durch Biegung und Torsion hervorgerufen. Schubspannungsanteile aus Biegung sind nicht über das Materialgesetz bestimmbar, da nach der Bernoulli-Hypothese aus 2.1 die entsprechenden Verzerrungen im Verschiebungsansatz null sind. Näherungsweise werden die Biegeschubspannungen in Analogie zur linearen Theorie aus dem Gleichgewicht für die Biegespannungen bestimmt.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3} + p_1 = 0 \quad (132)$$

Zur Bestimmung der Biegeschubspannungen  $\sigma_{12}^b, \sigma_{13}^b$  erfolgt unter der Annahme, daß die Volumenkräfte  $p_i$  nur Verschiebungen in Richtung  $y_i$  verursachen. Die Kraft  $p_1$  aus (132) verursacht damit nur Spannungen als Funktion von  $y_1$ . Mit Gleichung (129) folgt :

$$\frac{\partial s_{11}}{\partial y_1} + p_1 = 0 \quad (133)$$

Die Biegeschubspannung  $\sigma_{13}^b$  ist eine Funktion der Koordinaten  $y_1, y_3$ . Substitution von (129) und (133) liefert für das Gleichgewicht :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3} + p_1 = 0 \quad (134)$$

$$y_3 \frac{\partial s_{11(3)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{13}^b}{\partial y_3} = 0 \quad (135)$$

Die Biegeschubspannung  $\sigma_{13}^b$  bei  $y_3$  (Rand  $EF$ , Bild 6) folgt durch Integration über die Teilfläche  $A$  :

$$\int_A \left[ y_3 \frac{\partial s_{11(3)}}{\partial y_3} + \frac{\partial \sigma_{13}^b}{\partial y_3} \right] da = 0 \quad (136)$$

Partielle Integration von (136) liefert :

$$\sigma_{13}^b = \int_A y_3 \frac{\partial s_{11(3)}}{\partial y_1} da - \int_{y_3} y_3 s_{11(3)} dy_1 \quad (137)$$

$$= \frac{\partial s_{11(3)}}{\partial y_1} \left( \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} y_3^2 \right) + y_3 s_{11(3)}|_R \quad (138)$$

Die Biegeschubspannungen  $\sigma_{12}^b$  bestimmen sich auf analoge Weise am Rand  $CD$  :

$$\sigma_{12}^b = \frac{\partial s_{11(2)}}{\partial y_1} \left( \frac{1}{8} b^2 - \frac{1}{2} y_2^2 \right) + y_2 s_{11(2)}|_R \quad (139)$$

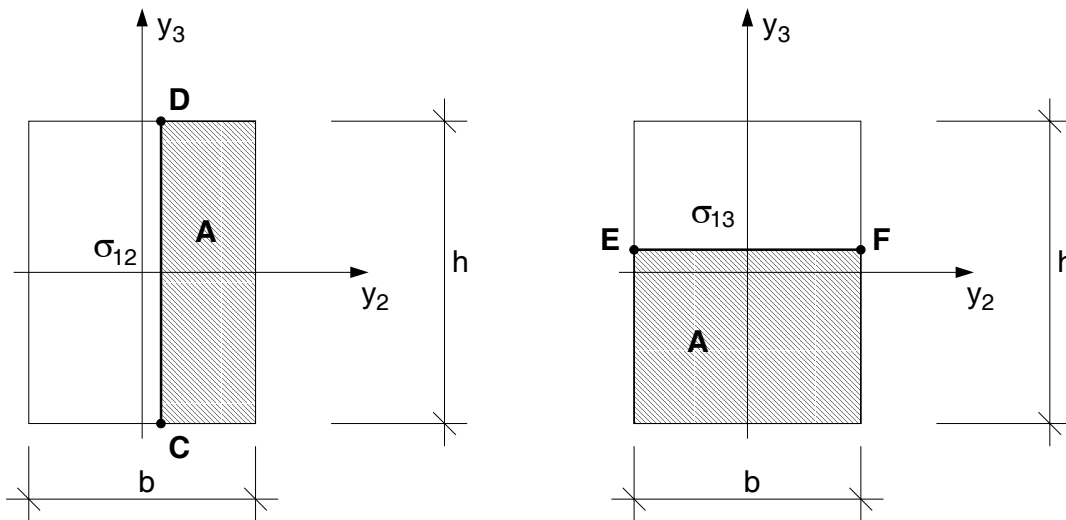


Bild 6: Biegeschubspannungen  $\sigma_{12}^b, \sigma_{13}^b$

Für die Gesamtschubspannungen aus Biegung und Torsion ergibt sich damit :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12} &= \sigma_{12}^b + \sigma_{12}^t \\
 &= \frac{\partial s_{11(2)}}{\partial y_1} \left( \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{2}y_2^2 \right) + y_3 s_{12(3)}
 \end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13} &= \sigma_{13}^b + \sigma_{13}^t \\
 &= \frac{\partial s_{11(3)}}{\partial y_1} \left( \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{2}y_3^2 \right) + y_2 s_{13(2)}
 \end{aligned} \tag{141}$$

## 5 Schnittgrößenzustände

Die Schnittgrößen im Element werden aus dem Spannungstensor bestimmt. Dazu wird der Spannungsverlauf über den Elementquerschnitt integriert. Die linear mit den Querschnittsachsen variierenden Spannungsterme liefern keine Beiträge zu den Schnittkräften :

$$\int_{-0.5h}^{+0.5h} s_{ik} y_3 dy_3 = 0 \qquad \int_{-0.5b}^{+0.5b} s_{ik} y_2 dy_2 = 0$$

### 5.1 Schnittkräfte

1. Normalkraft  $q_{11}$  :

$$q_{11} = \int_{\delta C} \sigma_{11} da \qquad (142)$$

$$= b \cdot h \cdot s_{11(1)} \qquad (143)$$

2. Querkraft  $q_{12}$  :

$$q_{12} = \int_{\delta C} \sigma_{12} da \qquad (144)$$

$$= \frac{\partial s_{11(2)}}{\partial y_1} \left(-\frac{1}{12} b^3 h\right) \qquad (145)$$

3. Querkraft  $q_{13}$  :

$$q_{13} = \int_{\delta C} \sigma_{13} da \qquad (146)$$

$$= \frac{\partial s_{11(3)}}{\partial y_1} \left(-\frac{1}{12} b h^3\right) \qquad (147)$$

### 5.2 Schnittmomente

Die Spannungen verursachen Momente um alle drei Elementachsen :

1. Torsionsmoment  $m_1$  aus Torsionsschubspannungen :

$$m_1 = \int_{\delta C} y_2 \sigma_{13} - y_3 \sigma_{12} da \qquad (148)$$

$$= \int_{\delta C} y_2^2 s_{12(3)} - y_3^2 s_{13(2)} da \qquad (149)$$

$$= \int_{\delta C} G (y_2^2 + y_3^2) \alpha_{,1} da \qquad (150)$$

$$= GI_P \alpha_{,1} \qquad (151)$$

2. Biegemoment  $m_2$  um die  $y_2$ -Achse aus Normalspannung :

$$m_2 = \int_{\delta C} y_3 \sigma_{11} da \quad (152)$$

$$= \int_{\delta C} y_3 s_{11(1)} + y_3 y_2 s_{11(2)} + y_3^2 s_{11(3)} da \quad (153)$$

$$= EI_{y2} s_{11(3)} \quad (154)$$

3. Biegemoment  $m_3$  um die  $y_3$ -Achse aus Normalspannung :

$$m_3 = \int_{\delta C} y_2 \sigma_{11} da \quad (155)$$

$$= \int_{\delta C} y_2 s_{11(1)} + y_2^2 s_{11(2)} + y_2 y_3 s_{11(3)} da \quad (156)$$

$$= EI_{y3} s_{11(2)} \quad (157)$$

$I_P$  Polares Trägheitsmoment

$I_{y2}$  Trägheitsmoment um die  $y_2$ -Achse

$I_{y3}$  Trägheitsmoment um die  $y_3$ -Achse

## 6 Randbedingungen

### 6.1 Kinematische Randbedingungen

Die Verschiebungsrandbedingungen werden am Rand  $\partial C_v$  der Stabachse eingepägt. Sie werden durch den Verschiebungsansatz 2.3 exakt befriedigt. Mit Einprägungen der Verschiebungen  $v_2$  und  $v_3$ , sind implizit auch die Ableitungen  $\frac{\partial v_2}{\partial y_3}$  bzw.  $\frac{\partial v_3}{\partial y_2}$  eingepägt. Auf dem Rand  $\partial C_u$  sind folgende kinematische Randbedingungen möglich :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial y_3} &= \frac{\partial v_{20}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial y_2} &= \frac{\partial v_{30}}{\partial y_2} \end{aligned} \quad (158)$$

### 6.2 Statische Randbedingungen

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  auf dem Rand  $\partial C_t$  bestimmt sich aus dem Spannungszustand  $\mathbf{S}$  der durch den 2. Piola-Kirchhofftensor (Kap. 4) für beliebige Punkte im Element spezifiziert ist. Die Einheitsnormale auf dem Rand  $\partial C_t$  entspricht dem Basisvektor  $\mathbf{c}_1$  der Momentankonfiguration  $\hat{C}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{S} \mathbf{c}_1 \\ &= \mathbf{S}_{(1)} \mathbf{c}_1 + y_2 \mathbf{S}_{(2)} \mathbf{c}_1 + y_3 \mathbf{S}_{(3)} \mathbf{c}_1 \\ &= \mathbf{t}_{(1)} + y_2 \mathbf{t}_{(2)} + y_3 \mathbf{t}_{(3)} \end{aligned} \quad (159)$$

- $\mathbf{S}_{(1)}$  Normalspannungsanteil des 2. Piola-Kirchhofftensors
- $\mathbf{S}_{(2)}$  Biegespannungsanteil des 2. Piola-Kirchhofftensors um die  $y_2$ -Achse
- $\mathbf{S}_{(3)}$  Biegespannungsanteil des 2. Piola-Kirchhofftensors um die  $y_3$ -Achse

- $\mathbf{t}_{(1)}$  Normalspannungsanteil des Randspannungsvektors
- $\mathbf{t}_{(2)}$  Biegespannungsanteil des Randspannungsvektors
- $\mathbf{t}_{(3)}$  Biegespannungsanteil des Randspannungsvektors

Integration über den Elementquerschnitt liefert den Schnittkraftvektor  $\mathbf{q}_r$  auf  $\partial C_t$  :

$$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} q_{r1} \\ q_{r2} \\ q_{r3} \end{bmatrix} = \mathbf{q}_{r(1)} + \mathbf{q}_{r(2)} + \mathbf{q}_{r(3)} \quad (160)$$

Mit den Randschnittgrößen sind folgende Einprägungen auf dem Rand  $\partial C_t$  möglich :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{r(1)} &= \mathbf{q}_{r(10)} \\ \mathbf{q}_{r(2)} &= \mathbf{q}_{r(20)} \\ \mathbf{q}_{r(3)} &= \mathbf{q}_{r(30)} \end{aligned} \quad (161)$$

## 7 Inkrementelle Bestimmungsgleichungen

### 7.1 Konzept

Die nichtlineare Berechnung erfolgt schrittweise. Die Lösung der Integralform der Bestimmungsgleichungen wird in Lastschritte gegliedert. Der Referenzzustand  $C$  des Balkens zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist bekannt. Ebenfalls als bekannt vorausgesetzt wird der Zustand des Balkenelementes zu Beginn eines Lastschritts. Dieser Zustand wird als Momentankonfiguration  $\hat{C}$  gekennzeichnet. Gesucht ist der Verformungszustand des Stabelements am Ende des Lastschritts. Dieser Zustand wird als Momentankonfiguration  $\bar{C}$  bezeichnet. Er wird mit einer linearen Theorie so bestimmt, daß die inneren und äußeren Arbeiten im Gleichgewicht stehen. Der Linearisierungsfehler wird durch eine nachfolgende Gleichgewichtsiteration korrigiert. Die Bestimmungsgleichungen für einen Lastschritt werden als inkrementelle Form der Bestimmungsgleichungen bezeichnet.

Die Zustandsvariablen in der Momentankonfiguration  $\bar{C}$  werden als Summe ihres Wertes in  $\hat{C}$  und einem inkrementellen Zuwachs, durch das Symbol  $\Delta$  gekennzeichnet, bestimmt.

$$\text{Verschiebung} \quad : \quad \bar{v}_i = \hat{v}_i + \Delta v_i \quad (162)$$

$$\text{Dehnungstensor} \quad : \quad \bar{e}_{im} = \hat{e}_{im} + \Delta e_{im} \quad (163)$$

$$\text{Spannungstensor} \quad : \quad \bar{s}_{im} = \hat{s}_{im} + \Delta s_{im} \quad (164)$$

### 7.2 Verschiebungsinkremente

Der inkrementelle Verschiebungsansatz folgt aus dem allgemeinen Verschiebungsansatz (2.3) für  $\mathbf{v}_{(Q)}$  :

$$\Delta \mathbf{v}_{(Q)} = \Delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{T}_\theta \mathbf{y} \quad (165)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{bmatrix}_{(Q)} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t_{11} & \Delta t_{12} & \Delta t_{13} \\ \Delta t_{21} & \Delta t_{22} & \Delta t_{23} \\ \Delta t_{31} & \Delta t_{32} & \Delta t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (166)$$

$\Delta \mathbf{v}$  Inkrementeller Verschiebungsvektor des Achspunktes  $P$

$\Delta \mathbf{T}_\theta$  Inkrementelle Drehverschiebungsmatrix

$\mathbf{y}$  Stabkoordinaten von  $Q$  im Stabquerschnitt durch  $P$



## 7.2.1 Koeffizienten der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix

Die Koeffizienten  $\Delta t_{im}$  der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix werden aus den Gleichungen (167) bis (175) ermittelt :

$$\begin{aligned}\bar{t}_{11} &= \hat{t}_{11} + \Delta t_{11} \\ &= -v_{2,1} \Delta v_{2,1} - v_{3,1} \Delta v_{3,1} - \frac{1}{2} (v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2 + \Delta v_{3,1}^2 + \Delta v_{2,1}^2)\end{aligned}\quad (167)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{21} &= \hat{t}_{21} + \Delta t_{21} \\ &= v_{2,1} - v_{1,1} v_{2,1} + \Delta v_{2,1} - v_{1,1} \Delta v_{2,1} - v_{2,1} \Delta v_{1,1} - \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,1}\end{aligned}\quad (168)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{31} &= \hat{t}_{31} + \Delta t_{31} \\ &= v_{3,1} - v_{1,1} v_{3,1} + \Delta v_{3,1} - v_{1,1} \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta v_{1,1} - \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,1}\end{aligned}\quad (169)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{12} &= \hat{t}_{12} + \Delta t_{12} \\ &= v_{1,1} v_{2,1} - \theta_1 v_{3,1} - v_{2,1} - \Delta v_{2,1} + v_{1,1} \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta v_{1,1} \\ &\quad - \theta_1 \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta \theta_1 - \Delta \theta_1 \Delta v_{3,1} - \Delta v_{2,1} \Delta v_{1,1}\end{aligned}\quad (170)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{22} &= \hat{t}_{22} + \Delta t_{22} \\ &= -\theta_1 \Delta \theta_1 - v_{2,1} \Delta v_{2,1} - \frac{1}{2} (v_{2,1}^2 + \theta_1^2 + \Delta v_{2,1}^2 + \Delta \theta_1^2)\end{aligned}\quad (171)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{32} &= \hat{t}_{32} + \Delta t_{32} \\ &= \theta_1 + \Delta \theta_1 - \frac{1}{2} (v_{2,1} v_{3,1} + v_{2,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,1})\end{aligned}\quad (172)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{13} &= \hat{t}_{13} + \Delta t_{13} \\ &= v_{1,1} v_{3,1} + \theta_1 v_{2,1} - v_{3,1} - \Delta v_{3,1} + v_{1,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{1,1} \\ &\quad + \theta_1 \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta \theta_1 + \Delta \theta_1 \Delta v_{2,1} + \Delta v_{3,1} \Delta v_{1,1}\end{aligned}\quad (173)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{23} &= \hat{t}_{23} + \Delta t_{23} \\ &= -\theta_1 - \Delta \theta_1 - \frac{1}{2} (v_{2,1} v_{3,1} + v_{2,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,1})\end{aligned}\quad (174)$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_{33} &= \hat{t}_{33} + \Delta t_{33} \\ &= -v_{3,1} \Delta v_{3,1} - \theta_1 \Delta \theta_1 - \frac{1}{2} (v_{3,1}^2 + \theta_1^2 + \Delta v_{3,1}^2 + \Delta \theta_1^2)\end{aligned}\quad (175)$$

Aus den Gleichungen (167) bis (175) werden die inkrementellen Zuwächse  $\Delta t_{im}$  extrahiert.

$$\Delta t_{11} = -v_{2,1} \Delta v_{2,1} - v_{3,1} \Delta v_{3,1} - \frac{1}{2}(\Delta v_{2,1}^2 + \Delta v_{3,1}^2) \quad (176)$$

$$\Delta t_{21} = (1 - \Delta v_{1,1})\Delta v_{2,1} - v_{1,1} \Delta v_{2,1} - v_{2,1} \Delta v_{1,1} \quad (177)$$

$$\Delta t_{31} = (1 - \Delta v_{1,1})\Delta v_{3,1} - v_{1,1} \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta v_{1,1} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} \Delta t_{12} = & v_{1,1} \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta v_{1,1} - \theta_1 \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta \theta_1 - \Delta v_{2,1} \\ & + \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,1} - \Delta \theta_1 \Delta v_{3,1} \end{aligned} \quad (179)$$

$$\Delta t_{22} = -\theta_1 \Delta \theta_1 - v_{2,1} \Delta v_{2,1} - \frac{1}{2}(\Delta \theta_1^2 + \Delta v_{2,1}^2) \quad (180)$$

$$\Delta t_{32} = \Delta \theta_1 - \frac{1}{2}(v_{2,1}\Delta v_{3,1} + v_{3,1}\Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,1}\Delta v_{3,1}) \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \Delta t_{13} = & v_{1,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{1,1} + \theta_1 \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta \theta_1 - \Delta v_{3,1} \\ & + \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,1} + \Delta \theta_1 \Delta v_{2,1} \end{aligned} \quad (182)$$

$$\Delta t_{23} = -\Delta \theta_1 - \frac{1}{2}(v_{2,1}\Delta v_{3,1} + v_{3,1}\Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,1}\Delta v_{3,1}) \quad (183)$$

$$\Delta t_{33} = -\theta_1 \Delta \theta_1 - v_{3,1} \Delta v_{3,1} - \frac{1}{2}(\Delta \theta_1^2 + \Delta v_{3,1}^2) \quad (184)$$

## 7.2.2 Ableitungen der Koeffizienten der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix

In Analogie zu 2.3.3 werden für die Bestimmung des inkrementellen Dehnungszustandes die Ableitungen der Koeffizienten der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix nach  $y_1$  benötigt.

$$\begin{aligned}\Delta t_{11,1} &= -v_{2,11} \Delta v_{2,1} - v_{2,1} \Delta v_{2,11} - v_{3,11} \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta v_{3,11} \\ &\quad - \Delta v_{2,11} \Delta v_{2,1} - \Delta v_{3,11} \Delta v_{3,1}\end{aligned}\quad (185)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{21,1} &= \Delta v_{2,11} - v_{1,11} \Delta v_{2,1} - v_{1,1} \Delta v_{2,11} - v_{2,1} \Delta v_{1,11} - v_{2,11} \Delta v_{1,1} \\ &\quad - \Delta v_{1,11} \Delta v_{2,1} - \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,11}\end{aligned}\quad (186)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{31,1} &= \Delta v_{3,11} - v_{1,11} \Delta v_{3,1} - v_{1,1} \Delta v_{3,11} - v_{3,1} \Delta v_{1,11} - v_{3,11} \Delta v_{1,1} \\ &\quad - \Delta v_{1,11} \Delta v_{3,1} - \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,11}\end{aligned}\quad (187)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{12,1} &= v_{1,11} \Delta v_{2,1} + v_{1,1} \Delta v_{2,11} + \Delta v_{1,11} v_{2,1} + v_{2,11} \Delta v_{1,1} - \theta_{1,1} \Delta v_{3,1} \\ &\quad - \theta_1 \Delta v_{3,11} - v_{3,1} \Delta \theta_{1,1} - v_{3,11} \Delta \theta_1 - \Delta v_{2,11} + \Delta v_{1,11} \Delta v_{2,1} \\ &\quad + \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,11} - \Delta \theta_{1,1} \Delta v_{3,1} - \Delta \theta_1 \Delta v_{3,11}\end{aligned}\quad (188)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{22,1} &= -\theta_{1,1} \Delta \theta_1 - \theta_1 \Delta \theta_{1,1} - v_{2,11} \Delta v_{2,1} - v_{2,1} \Delta v_{2,11} \\ &\quad - \Delta \theta_1 \Delta \theta_{1,1} - \Delta v_{2,11} \Delta v_{2,1}\end{aligned}\quad (189)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{32,1} &= \Delta \theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,11} \Delta v_{3,1} + v_{2,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,1} \Delta v_{2,11} + v_{3,11} \Delta v_{2,1} \\ &\quad + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,11} + \Delta v_{2,11} \Delta v_{3,1})\end{aligned}\quad (190)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{13,1} &= v_{1,11} \Delta v_{3,1} + v_{1,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,1} \Delta v_{1,11} + v_{3,11} \Delta v_{1,1} + \theta_{1,1} \Delta v_{2,1} \\ &\quad + \theta_1 \Delta v_{2,11} + v_{2,1} \Delta \theta_{1,1} + v_{2,11} \Delta \theta_1 - \Delta v_{3,11} + \Delta v_{1,11} \Delta v_{3,1} \\ &\quad + \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,11} + \Delta \theta_{1,1} \Delta v_{2,1} + \Delta \theta_1 \Delta v_{2,11}\end{aligned}\quad (191)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{23,1} &= -\Delta \theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,11} \Delta v_{3,1} + v_{2,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,1} \Delta v_{2,11} + v_{3,11} \Delta v_{2,1} \\ &\quad + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,11} + \Delta v_{2,11} \Delta v_{3,1})\end{aligned}\quad (192)$$

$$\begin{aligned}\Delta t_{33,1} &= -\theta_{1,1} \Delta \theta_1 - \theta_1 \Delta \theta_{1,1} - v_{3,11} \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta v_{3,11} \\ &\quad - \Delta \theta_1 \Delta \theta_{1,1} - \Delta v_{3,11} \Delta v_{3,1}\end{aligned}\quad (193)$$

### 7.2.3 Ableitungen des inkrementellen Verschiebungsansatzes

Aus (165) folgen mit den Gleichungen aus 7.2.1 und 7.2.2 die Ableitungen der Verschiebungsinkremente :

$$\Delta v_{1,1(Q)} = \Delta v_{1,1} + y_2 \Delta t_{12,1} + y_3 \Delta t_{13,1} \quad (194)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)} = \Delta v_{2,1} + y_2 \Delta t_{22,1} + y_3 \Delta t_{23,1} \quad (195)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)} = \Delta v_{3,1} + y_2 \Delta t_{32,1} + y_3 \Delta t_{33,1} \quad (196)$$

$$\Delta v_{1,2(Q)} = \Delta t_{12} \quad (197)$$

$$\Delta v_{2,2(Q)} = \Delta t_{22} \quad (198)$$

$$\Delta v_{3,2(Q)} = \Delta t_{32} \quad (199)$$

$$\Delta v_{1,3(Q)} = \Delta t_{13} \quad (200)$$

$$\Delta v_{2,3(Q)} = \Delta t_{23} \quad (201)$$

$$\Delta v_{3,3(Q)} = \Delta t_{33} \quad (202)$$

Für die Bestimmung des inkrementellen Dehnungszustandes werden die Quadrate der Verschiebungsableitungen und alle erforderlichen gemischten Terme bestimmt.

$$\Delta v_{1,1(Q)}^2 \doteq \Delta v_{1,1}^2 + 2y_2 \Delta v_{1,1} \Delta t_{12,1} + 2y_3 \Delta v_{1,1} \Delta t_{13,1} \quad (203)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)}^2 \doteq \Delta v_{2,1}^2 + 2y_2 \Delta v_{2,1} \Delta t_{22,1} + 2y_3 \Delta v_{2,1} \Delta t_{23,1} \quad (204)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)}^2 \doteq \Delta v_{3,1}^2 + 2y_2 \Delta v_{3,1} \Delta t_{32,1} + 2y_3 \Delta v_{3,1} \Delta t_{33,1} \quad (205)$$

$$\Delta v_{1,1(Q)} \Delta v_{1,2(Q)} \doteq \Delta v_{1,1} \Delta t_{12} + y_2 \Delta t_{12} \Delta t_{12,1} + y_3 \Delta t_{12} \Delta t_{13,1} \quad (206)$$

$$\Delta v_{1,1(Q)} \Delta v_{1,3(Q)} \doteq \Delta v_{1,1} \Delta t_{13} + y_2 \Delta t_{13} \Delta t_{12,1} + y_3 \Delta t_{13} \Delta t_{13,1} \quad (207)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)} \Delta v_{2,2(Q)} \doteq \Delta v_{2,1} \Delta t_{22} + y_2 \Delta t_{22} \Delta t_{22,1} + y_3 \Delta t_{22} \Delta t_{23,1} \quad (208)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)} \Delta v_{2,3(Q)} \doteq \Delta v_{2,1} \Delta t_{23} + y_2 \Delta t_{23} \Delta t_{22,1} + y_3 \Delta t_{23} \Delta t_{23,1} \quad (209)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)} \Delta v_{3,2(Q)} \doteq \Delta v_{3,1} \Delta t_{32} + y_2 \Delta t_{32} \Delta t_{32,1} + y_3 \Delta t_{32} \Delta t_{33,1} \quad (210)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)} \Delta v_{3,3(Q)} \doteq \Delta v_{3,1} \Delta t_{33} + y_2 \Delta t_{33} \Delta t_{32,1} + y_3 \Delta t_{33} \Delta t_{33,1} \quad (211)$$

## 7.2.4 Substitution der inkrementellen Drehverschiebungskoeffizienten

Die Koeffizienten der inkrementellen Drehverschiebungsmatrix (Gleichungen (176) bis (184)) und deren Ableitungen (Gleichungen (185) bis (193)) werden in die Gleichungen (194) bis (202) substituiert :

$$\begin{aligned}
\Delta v_{1,1(Q)} = & \Delta v_{1,1} + y_2 ( v_{1,11} \Delta v_{2,1} + v_{1,1} \Delta v_{2,11} + v_{2,1} \Delta v_{1,11} + v_{2,11} \Delta v_{1,1} \\
& - \theta_{1,1} \Delta v_{3,1} - \theta_1 \Delta v_{3,11} - v_{3,1} \Delta \theta_{1,1} - v_{3,11} \Delta \theta_1 \\
& - \Delta v_{2,11} + \Delta v_{1,11} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,11} \\
& - \Delta \theta_{1,1} \Delta v_{3,1} - \Delta \theta_1 \Delta v_{3,11} ) \\
& + y_3 ( v_{1,11} \Delta v_{3,1} + v_{1,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,1} \Delta v_{1,11} + v_{3,11} \Delta v_{1,1} \\
& + \theta_{1,1} \Delta v_{2,1} + \theta_1 \Delta v_{2,11} + v_{2,1} \Delta \theta_{1,1} + v_{2,11} \Delta \theta_1 \\
& - \Delta v_{3,11} + \Delta v_{1,11} \Delta v_{3,1} + \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,11} \\
& + \Delta \theta_{1,1} \Delta v_{2,1} + \Delta \theta_1 \Delta v_{2,11} ) \tag{212}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_{2,1(Q)} = & \Delta v_{2,1} - y_2 ( \theta_{1,1} \Delta \theta_1 + \theta_1 \Delta \theta_{1,1} + v_{2,11} \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta v_{2,11} \\
& + \Delta \theta_{1,1} \Delta \theta_1 + \Delta v_{2,11} \Delta v_{2,1} ) \\
& - y_3 ( \Delta \theta_{1,1} + \frac{1}{2} (v_{2,11} \Delta v_{3,1} + v_{2,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,1} \Delta v_{2,11} \\
& + v_{3,11} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,11} \Delta v_{3,1} + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,11} ) ) \tag{213}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_{3,1(Q)} = & \Delta v_{3,1} + y_2 ( \Delta \theta_{1,1} - \frac{1}{2} (v_{2,11} \Delta v_{3,1} + v_{2,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,1} \Delta v_{2,11} \\
& + v_{3,11} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,11} \Delta v_{3,1} + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,11} ) ) \\
& - y_3 ( \theta_{1,1} \Delta \theta_1 + \theta_1 \Delta \theta_{1,1} + v_{3,11} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{3,11} \\
& + \Delta \theta_{1,1} \Delta \theta_1 + \Delta v_{3,11} \Delta v_{3,1} ) \tag{214}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_{1,2(Q)} = & v_{1,1} \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta v_{1,1} - \theta_1 \Delta v_{3,1} - v_{3,1} \Delta \theta_1 - \Delta v_{2,1} \\
& + \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,1} - \Delta \theta_1 \Delta v_{3,1} \tag{215}
\end{aligned}$$

$$\Delta v_{2,2(Q)} = -\theta_1 \Delta \theta_1 - v_{2,1} \Delta v_{2,1} - \frac{1}{2} (\Delta \theta_1^2 + \Delta v_{2,1}^2) \tag{216}$$

$$\Delta v_{3,2(Q)} = \Delta \theta_1 - \frac{1}{2} (v_{2,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,1}) \tag{217}$$

$$\begin{aligned}\Delta v_{1,3(Q)} &= v_{1,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{1,1} + \theta_1 \Delta v_{2,1} + v_{2,1} \Delta \theta_1 - \Delta v_{3,1} \\ &\quad + \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,1} + \Delta \theta_1 \Delta v_{2,1}\end{aligned}\quad (218)$$

$$\Delta v_{2,3(Q)} = -\Delta \theta_1 - \frac{1}{2} (v_{2,1} \Delta v_{3,1} + v_{3,1} \Delta v_{2,1} + \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,1}) \quad (219)$$

$$\Delta v_{3,3(Q)} = -\theta_1 \Delta \theta_1 - v_{3,1} \Delta v_{3,1} - \frac{1}{2} (\Delta \theta_1^2 + \Delta v_{3,1}^2) \quad (220)$$

Die Quadrate und gemischten Terme der inkrementellen Drehverschiebungskoeffizienten werden ebenfalls durch Substitution der Gleichungen (176) bis (193) in (203) bis (211) ermittelt :

$$\Delta v_{1,1(Q)}^2 = \Delta v_{1,1}^2 - 2y_2 \Delta v_{1,1} \Delta v_{2,11} - 2y_3 \Delta v_{1,1} \Delta v_{3,11} \quad (221)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)}^2 = \Delta v_{2,1}^2 - 2y_3 \Delta v_{2,1} \Delta \theta_{1,1} \quad (222)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)}^2 = \Delta v_{3,1}^2 + 2y_2 \Delta v_{3,1} \Delta \theta_{1,1} \quad (223)$$

$$\Delta v_{1,1(Q)} \Delta v_{1,2(Q)} = -\Delta v_{1,1} \Delta v_{2,1} + y_2 \Delta v_{2,1} \Delta v_{2,11} + y_3 \Delta v_{2,1} \Delta v_{3,11} \quad (224)$$

$$\Delta v_{1,1(Q)} \Delta v_{1,3(Q)} = -\Delta v_{1,1} \Delta v_{3,1} + y_2 \Delta v_{3,1} \Delta v_{2,11} + y_3 \Delta v_{3,1} \Delta v_{3,11} \quad (225)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)} \Delta v_{2,2(Q)} \doteq 0 \quad (226)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)} \Delta v_{2,3(Q)} = -\Delta v_{2,1} \Delta \theta_1 + y_3 \Delta \theta_1 \Delta \theta_{1,1} \quad (227)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)} \Delta v_{3,2(Q)} = \Delta v_{3,1} \Delta \theta_1 + y_2 \Delta \theta_1 \Delta \theta_{1,1} \quad (228)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)} \Delta v_{3,3(Q)} \doteq 0 \quad (229)$$

Für die inkrementellen Dehnungen sind zusätzlich gemischte Terme erforderlich, die aus den Ableitungen der Drehverschiebungskoeffizienten (86) bis (94) und den Ableitungen der inkrementellen Drehverschiebungskoeffizienten (194) bis (202) gebildet werden.

$$\begin{aligned}v_{1,1(Q)} \Delta v_{1,1(Q)} &= v_{1,1} \Delta v_{1,1} - y_2 (v_{1,1} \Delta v_{2,11} + v_{2,11} \Delta v_{1,1}) \\ &\quad - y_3 (v_{1,1} \Delta v_{3,11} + v_{3,11} \Delta v_{1,1})\end{aligned}\quad (230)$$

$$v_{2,1(Q)} \Delta v_{2,1(Q)} = v_{2,1} \Delta v_{2,1} - y_3 (v_{2,1} \Delta \theta_{1,1} + \theta_{1,1} \Delta v_{2,1}) \quad (231)$$

$$v_{3,1(Q)} \Delta v_{3,1(Q)} = v_{3,1} \Delta v_{3,1} + y_2 (v_{3,1} \Delta \theta_{1,1} + \theta_{1,1} \Delta v_{3,1}) \quad (232)$$

$$v_{1,1(Q)}\Delta v_{1,2(Q)} = -v_{1,1}\Delta v_{2,1} + y_2 v_{2,11}\Delta v_{2,1} + y_3 v_{3,11}\Delta v_{2,1} \quad (233)$$

$$v_{2,1(Q)}\Delta v_{2,2(Q)} \doteq 0 \quad (234)$$

$$v_{3,1(Q)}\Delta v_{3,2(Q)} = v_{3,1}\Delta\theta_1 + y_2\theta_{1,1}\Delta\theta_1 \quad (235)$$

$$v_{1,1(Q)}\Delta v_{1,3(Q)} = -v_{1,1}\Delta v_{3,1} + y_2 v_{2,11}\Delta v_{3,1} + y_3 v_{3,11}\Delta v_{3,1} \quad (236)$$

$$v_{2,1(Q)}\Delta v_{2,3(Q)} = -v_{2,1}\Delta\theta_1 + y_3\theta_{1,1}\Delta\theta_1 \quad (237)$$

$$v_{3,1(Q)}\Delta v_{3,3(Q)} \doteq 0 \quad (238)$$

$$\Delta v_{1,1(Q)}v_{1,2(Q)} = -v_{2,1}\Delta v_{1,1} + y_2 v_{2,1}\Delta v_{2,11} + y_3 v_{2,1}\Delta v_{3,11} \quad (239)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)}v_{2,2(Q)} \doteq 0 \quad (240)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)}v_{3,2(Q)} = \theta_1\Delta v_{3,1} + y_2\Delta\theta_{1,1}\theta_1 \quad (241)$$

$$\Delta v_{1,1(Q)}v_{1,3(Q)} = -v_{3,1}\Delta v_{1,1} + y_2 v_{3,1}\Delta v_{2,11} + y_3 v_{3,1}\Delta v_{3,11} \quad (242)$$

$$\Delta v_{2,1(Q)}v_{2,3(Q)} = -\theta_1\Delta v_{2,1} + y_3\Delta\theta_{1,1}\theta_1 \quad (243)$$

$$\Delta v_{3,1(Q)}v_{3,3(Q)} \doteq 0 \quad (244)$$

### 7.3 Dehnungsinkremente

Der Dehnungszustand der Momentankonfiguration  $\bar{C}$  folgt nach Substitution der Zustandsvariablen (162) bis (164) in die Koordinaten des Dehnungstensors nach Green-Lagrange (107). Die Tensorkoordinaten  $\bar{e}_{12}$  und  $\bar{e}_{13}$  werden durch die Ingenieurdehnungen  $\bar{\epsilon}_{12} = 2\bar{e}_{12}$  und  $\bar{\epsilon}_{13} = 2\bar{e}_{13}$  ersetzt :

$$\bar{\epsilon}_{11(Q)} = \hat{v}_{1,1(Q)} + \Delta v_{1,1(Q)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \{(\hat{v}_{k,1(Q)} + \Delta v_{k,1(Q)})^2\} \quad (245)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{12(Q)} = \hat{v}_{1,2(Q)} + \Delta v_{1,2(Q)} + \hat{v}_{2,1(Q)} + \Delta v_{2,1(Q)} + \\ \sum_{k=1}^3 \{(\hat{v}_{k,1(Q)} + \Delta v_{k,1(Q)})(\hat{v}_{k,2(Q)} + \Delta v_{k,2(Q)})\} \end{aligned} \quad (246)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{13(Q)} = \hat{v}_{1,3(Q)} + \Delta v_{1,3(Q)} + \hat{v}_{3,1(Q)} + \Delta v_{3,1(Q)} + \\ \sum_{k=1}^3 \{(\hat{v}_{k,1(Q)} + \Delta v_{k,1(Q)})(\hat{v}_{k,3(Q)} + \Delta v_{k,3(Q)})\} \end{aligned} \quad (247)$$

Die Dehnungsinkremente  $\Delta\epsilon_{11}$ ,  $\Delta\epsilon_{12}$ ,  $\Delta\epsilon_{13}$  werden aus den Gleichungen (245) bis (247) ermittelt. Zur besseren Darstellung werden sie in einen linear von  $\Delta v_i$  abhängigen Anteil  $\Delta\epsilon_{im}^L$  und einen nichtlinear von  $\Delta v_i$  abhängigen Anteil  $\Delta\epsilon_{im}^N$  aufgespalten. In Analogie zu 3.2, werden die Terme  $\Delta v_{1,1}^2$ ,  $\Delta v_{2,1}\Delta v_{1,11}$ ,  $\Delta v_{3,1}\Delta v_{1,11}$ ,  $v_{1,1}\Delta v_{1,1}$  sowie Terme höherer Ordnung im folgenden vernachlässigt.

$$\Delta\epsilon_{11} = \Delta\epsilon_{11}^L + \Delta\epsilon_{11}^N \quad (248)$$

$$\Delta\epsilon_{11}^L = \Delta v_{1,1} + v_{2,1}\Delta v_{2,1} + v_{3,1}\Delta v_{3,1} - y_2(\Delta v_{2,11} + v_{3,11}\Delta\theta_1 + \theta_1\Delta v_{3,11}) - y_3(\Delta v_{3,11} - v_{2,11}\Delta\theta_1 - \theta_1\Delta v_{2,11}) \quad (249)$$

$$\Delta\epsilon_{11}^N = \frac{1}{2}(\Delta v_{2,1}^2 + \Delta v_{3,1}^2) - y_2(\Delta\theta_1\Delta v_{3,11}) + y_3(\Delta\theta_1\Delta v_{2,11}) \quad (250)$$

$$\Delta\epsilon_{12} = \Delta\epsilon_{12}^L + \Delta\epsilon_{12}^N \quad (251)$$

$$\Delta\epsilon_{12}^L = -y_3(\Delta\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,11}\Delta v_{3,1} + v_{3,1}\Delta v_{2,11} - v_{3,11}\Delta v_{2,1} - v_{2,1}\Delta v_{3,11})) \quad (252)$$

$$\Delta\epsilon_{12}^N = -\frac{1}{2}y_3(\Delta v_{3,1}\Delta v_{2,11} - \Delta v_{3,11}\Delta v_{2,1}) \quad (253)$$

$$\Delta\epsilon_{13} = \Delta\epsilon_{13}^L + \Delta\epsilon_{13}^N \quad (254)$$

$$\Delta\epsilon_{13}^L = y_2(\Delta\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,11}\Delta v_{3,1} + v_{3,1}\Delta v_{2,11} - v_{3,11}\Delta v_{2,1} - v_{2,1}\Delta v_{3,11})) \quad (255)$$

$$\Delta\epsilon_{13}^N = \frac{1}{2}y_2(\Delta v_{3,1}\Delta v_{2,11} - \Delta v_{3,11}\Delta v_{2,1}) \quad (256)$$



Mit den Gleichungen (249) bis (256) folgt für den inkrementellen Dehnungszustand am Punkt Q :

$$\Delta\epsilon_{(Q)} = \Delta\epsilon_{(1)}^L + \Delta\epsilon_{(1)}^N + y_2(\Delta\epsilon_{(2)}^L + \Delta\epsilon_{(2)}^N) + y_3(\Delta\epsilon_{(3)}^L + \Delta\epsilon_{(3)}^N) \quad (257)$$

mit

$$\Delta\epsilon_{(1)}^L = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(1)}^L \\ \Delta\epsilon_{12(1)}^L \\ \Delta\epsilon_{13(1)}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_{1,1} + v_{2,1}\Delta v_{2,1} + v_{3,1}\Delta v_{3,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (258)$$

$$\Delta\epsilon_{(2)}^L = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(2)}^L \\ \Delta\epsilon_{12(2)}^L \\ \Delta\epsilon_{13(2)}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Delta v_{2,11} + v_{3,11}\Delta\theta_1 + \theta_1\Delta v_{3,11}) \\ 0 \\ \Delta\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(v_{2,11}\Delta v_{3,1} + v_{3,1}\Delta v_{2,11} \\ -v_{3,11}\Delta v_{2,1} - v_{2,1}\Delta v_{3,11}) \end{bmatrix} \quad (259)$$

$$\Delta\epsilon_{(3)}^L = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(3)}^L \\ \Delta\epsilon_{12(3)}^L \\ \Delta\epsilon_{13(3)}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta v_{3,11} + v_{2,11}\Delta\theta_1 + \theta_1\Delta v_{2,11} \\ -\Delta\theta_{1,1} - \frac{1}{2}(v_{2,11}\Delta v_{3,1} + v_{3,1}\Delta v_{2,11} \\ -v_{3,11}\Delta v_{2,1} - v_{2,1}\Delta v_{3,11}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (260)$$

$$\Delta\epsilon_{(1)}^N = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(1)}^N \\ \Delta\epsilon_{12(1)}^N \\ \Delta\epsilon_{13(1)}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\Delta v_{2,1}^2 + \Delta v_{3,1}^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (261)$$

$$\Delta\epsilon_{(2)}^N = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(2)}^N \\ \Delta\epsilon_{12(2)}^N \\ \Delta\epsilon_{13(2)}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta\theta_1\Delta v_{3,11} \\ 0 \\ \frac{1}{2}(\Delta v_{3,1}\Delta v_{2,11} - \Delta v_{3,11}\Delta v_{2,1}) \end{bmatrix} \quad (262)$$

$$\Delta\epsilon_{(3)}^N = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(3)}^N \\ \Delta\epsilon_{12(3)}^N \\ \Delta\epsilon_{13(3)}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1\Delta v_{2,11} \\ -\frac{1}{2}(\Delta v_{3,1}\Delta v_{2,11} - \Delta v_{3,11}\Delta v_{2,1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (263)$$

## 7.4 Variation des Verschiebungszustandes

Als Gewichtung für die inkrementelle Form der Integralgleichung in der Momentankonfiguration  $\bar{C}$  wird die Variation des Verschiebungszustandes in  $\bar{C}$  gewählt.

$$\delta \bar{\mathbf{v}}_{(Q)} = \delta (\hat{\mathbf{v}} + \Delta \mathbf{v})_{(Q)} = \delta \hat{\mathbf{v}}_{(Q)} + \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)}) \quad (264)$$

In der bekannten Momentankonfiguration  $\hat{C}$  befindet sich der Körper bereits in einer Gleichgewichtslage, sodaß die mit  $\delta \hat{\mathbf{v}}_{(Q)}$  gewichteten Gleichungen bereits befriedigt sind. Die Gewichtung der Bestimmungsgleichungen in  $\bar{C}$  erfordert somit lediglich die Variation des Verschiebungsinkrementes  $\Delta \mathbf{v}_{(Q)}$ .

$$\delta \bar{\mathbf{v}}_{(Q)} = \delta (\Delta \mathbf{v})_{(Q)} = \delta (\Delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{T} \mathbf{y}) \quad (265)$$

In Analogie zur Variation des Verschiebungsinkrementes bestimmt sich die zur Bestimmung der inneren Arbeiten erforderliche Variation des Dehnungsinkrementes.

$$\delta \Delta \epsilon = \delta (\Delta \epsilon^L) + \delta (\Delta \epsilon^N) \quad (266)$$

## 7.5 Inkrementelle Form der Bestimmungsgleichungen

### 7.5.1 Materielle Form der Bestimmungsgleichungen

Die inkrementelle Form der Bestimmungsgleichungen für geometrisch nichtlineares Verhalten räumlicher Stabtragwerke wird aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen abgeleitet. Die der nachfolgenden Formulierung zugrunde liegende materielle Form der Integralgleichung basiert auf der Methode von Lagrange. Materielle Punkte werden durch ihre Lage in der Referenzkonfiguration  $C$  identifiziert.

$$\int_C \sum_i \sum_m \delta e_{im} s_{im} dv = \int_C \sum_i \delta v_i q_{(v_i)} \rho dv + \int_{C_u} \sum_i \delta v_i p_i da + \int_{C_t} \sum_i \delta v_i p_{i0} da \quad (267)$$

$$\mathbf{x} \in C \wedge v_{i0} \in C_u : v_i = v_{i0}$$

bzw. in Vektornotation :

$$\int_C \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dv = \int_C \delta \mathbf{v}^T \mathbf{q}_V \rho dv + \int_{C_u} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} da + \int_{C_t} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p}_0 da \quad (268)$$

$$\mathbf{x} \in C \wedge v_{i0} \in C_u : v_i = v_{i0}$$

Der Dehnungsvektor  $\epsilon$  in (268) enthält die Koordinaten  $e_{im}$  des Green-Lagrange Dehnungstensors. Der Spannungsvektor  $\boldsymbol{\sigma}$  enthält die entsprechenden Koordinaten  $s_{im}$  des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors.

Die Koordinaten  $e_{im}$  des Green-Lagrange Dehnungstensors sind Größen, die sich auf den Zustand des Körpers in der Momentankonfiguration  $\hat{C}$  beziehen, aber bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{i}_i$  der Referenzkonfiguration  $C$  gemessen werden. Die Koordinaten  $s_{im}$  des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors sind die energetisch konjugierten Spannungskoordinaten zu den Dehnungen  $e_{im}$ .

Für die Seite der äußeren Arbeiten werden konservative Lasten vereinbart. Die Koordinaten  $p_i$  des Lastvektors bleiben damit in den verschiedenen Konfigurationen des Körpers richtungstreu.

### 7.5.2 Inkrementelle Form der Bestimmungsgleichungen

Die materielle Form der Integralgleichung (268) wird für den unbekanntem Zustand  $\bar{C}$  bestimmt. Für die Seite der inneren Arbeiten folgt :

$$\begin{aligned}
& \int_C \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dv \\
&= \int_C \delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^L + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^N)^T (\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) dv \\
&= \int_C \underline{\delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^L)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dv} + \int_C \delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^L)^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dv + \int_C \delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^N)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dv + \int_C \delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^N)^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dv
\end{aligned} \tag{269}$$

Analog bestimmt sich die Seite der äußeren Arbeiten :

$$\begin{aligned}
& \int_C \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{q}}_V \rho dv + \int_{C_u} \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{p}} da + \int_{C_t} \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{p}}_0 da \\
&= \int_C \underline{\delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{q}}_V \rho dv} + \int_C \delta (\Delta \mathbf{v})^T (\Delta \mathbf{q}_V \rho) dv + \\
& \int_{C_u} \underline{\delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{p}} da} + \int_{C_u} \delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta \mathbf{p} da + \\
& \int_{C_t} \underline{\delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{p}}_0 da} + \int_{C_t} \delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta \mathbf{p}_0 da
\end{aligned} \tag{270}$$

Die linke und rechte Seite der Bestimmungsgleichungen ((269), (270)) enthalten sowohl Terme aus der Momentankonfiguration  $\hat{C}$ , als auch Terme die nur den inkrementellen Zuwachs in  $\bar{C}$  betreffen. Die unterstrichenen Terme aus (269) und (270) stehen näherungsweise im Gleichgewicht. Die durch die Näherungen in vorangehenden Lastschritten verursachten Restkräfte werden in dem Term  $\Delta r$  zusammengefasst.  $\Delta r$  ist in der Regel nicht null. Dieser Term wird deshalb als Korrekturterm auf der Lastseite eingeführt. Die inkrementelle Form der Bestimmungsgleichung setzt sich schließlich wie folgt zusammen :

$$\boxed{
\begin{aligned}
& \int_C \delta (\Delta \epsilon^L)^T \Delta \sigma \, dv + \int_C \delta (\Delta \epsilon^N)^T \hat{\sigma} \, dv + \int_C \delta (\Delta \epsilon^N)^T \Delta \sigma \, dv = \\
& \int_C \delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta (\mathbf{q}_V \rho) \, dv + \int_{C_u} \delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta \mathbf{p} \, da + \int_{C_t} \delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta \mathbf{p}_0 \, da + \Delta r
\end{aligned}
} \quad (271)$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta r = & \int_C \delta (\Delta \mathbf{v})^T (\hat{\mathbf{q}}_V \rho) \, dv + \int_{C_u} \delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{p}} \, da + \int_{C_t} \delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{p}}_0 \, da \\
& - \int_C \delta (\Delta \epsilon^L)^T \hat{\sigma} \, dv
\end{aligned} \quad (272)$$

## 7.6 Semianalytische Form der inkrementellen Bestimmungsgleichungen

Die allgemeine Form des Prinzip der virtuellen Verschiebungen (271) wird in eine auf Stabtragwerke abgestimmte Form überführt. Mit der Definition der Dehnungsinkremente in 7.3 folgt eine neue, auf die neutrale Stabfaser bezogene Formulierung. Über den Elementquerschnitt wird analytisch integriert. Im folgenden sind die Terme aus Gleichung (271) einzeln aufgeführt :

$$\int_C \delta (\Delta \epsilon^L)^T \Delta \sigma \, dv \quad (273)$$

$$\begin{aligned}
= & \int_L \int_h \int_b \delta \left( \Delta \epsilon_{(1)}^L + y_2 \Delta \epsilon_{(2)}^L + y_3 \Delta \epsilon_{(3)}^L \right)^T \mathbf{C} \left( \Delta \epsilon_{(1)}^L + \Delta \epsilon_{(1)}^N \right. \\
& \left. + y_2 (\Delta \epsilon_{(2)}^L + \Delta \epsilon_{(2)}^N) + y_3 (\Delta \epsilon_{(3)}^L + \Delta \epsilon_{(3)}^N) \right) \, dy_2 \, dy_3 \, dl
\end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned}
= & \int_L \left\{ \delta (\Delta \epsilon_{(1)}^L)^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{(1)}^L A + \delta (\Delta \epsilon_{(2)}^L)^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{(2)}^L I_3 + \right. \\
& \delta (\Delta \epsilon_{(3)}^L)^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{(3)}^L I_2 + \delta (\Delta \epsilon_{(1)}^L)^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{(1)}^N A + \\
& \left. \delta (\Delta \epsilon_{(2)}^L)^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{(2)}^N I_3 + \delta (\Delta \epsilon_{(3)}^L)^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{(3)}^N I_2 \right\} \, dl
\end{aligned} \quad (275)$$

$$\int_C \delta(\Delta\epsilon^N)^T \hat{\sigma} dv \quad (276)$$

$$= \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_L \delta (\Delta\epsilon_{(1)}^N + y_2 \Delta\epsilon_{(2)}^N + y_3 \Delta\epsilon_{(3)}^N)^T (\hat{\sigma}_{(1)} + y_2 \hat{\sigma}_{(2)} + y_3 \hat{\sigma}_{(3)}) dy_2 dy_3 dl \quad (277)$$

$$= \int_L \{ \delta(\Delta\epsilon_{(1)}^N)^T \hat{\sigma}_{(1)} A + \delta(\Delta\epsilon_{(2)}^N)^T \hat{\sigma}_{(2)} I_3 + \delta(\Delta\epsilon_{(3)}^N)^T \hat{\sigma}_{(3)} I_2 \} dl \quad (278)$$

$$\text{mit } I_2 = \int_A y_3^2 da \quad I_3 = \int_A y_2^2 da$$

Der dritte Term aus (271) ist kubisch in den Inkrementen der Verschiebungsableitungen und wird deshalb als sehr klein angenommen und nicht entwickelt. Der Fehler dieser Näherung liefert Restkräfte, die im Term  $\Delta r$  des nachfolgenden Lastschrittes erfasst werden.

Die Variation der nichtlinearen Dehnungsinkremente aus (278) wird auf die Koeffizienten der Vektoren  $\Delta\epsilon_{(1)}^N, \Delta\epsilon_{(2)}^N, \Delta\epsilon_{(3)}^N$  übertragen :

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\epsilon_{(1)}^N) &= \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\Delta v_{2,1}^2 + \Delta v_{3,1}^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta v_{2,1} \delta(\Delta v_{2,1}) + \Delta v_{3,1} \delta(\Delta v_{3,1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (279)$$

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\epsilon_{(2)}^N) &= \delta \begin{bmatrix} -\Delta\theta_1 \Delta v_{3,11} \\ 0 \\ \frac{1}{2}(\Delta v_{3,1} \Delta v_{2,11} - \Delta v_{3,11} \Delta v_{2,1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\delta(\Delta\theta_1) \Delta v_{3,11} + \Delta\theta_1 \delta(\Delta v_{3,11})) \\ 0 \\ \left[ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}(\delta(\Delta v_{3,1}) \Delta v_{2,11} + \Delta v_{3,1} \delta(\Delta v_{2,11})) \\ -\frac{1}{2}(\delta(\Delta v_{3,11}) \Delta v_{2,1} + \Delta v_{3,11} \delta(\Delta v_{2,1})) \end{array} \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (280)$$

$$\begin{aligned}
\delta(\Delta\epsilon_{(3)}^N) &= \delta \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \Delta v_{2,11} \\ -\frac{1}{2}(\Delta v_{3,1} \Delta v_{2,11} - \Delta v_{3,11} \Delta v_{2,1}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta(\Delta\theta_1) \Delta v_{2,11} + \Delta\theta_1 \delta(\Delta v_{2,11}) \\ \left[ -\frac{1}{2}(\delta(\Delta v_{3,1}) \Delta v_{2,11} + \Delta v_{3,1} \delta(\Delta v_{2,11})) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\delta(\Delta v_{3,11}) \Delta v_{2,1} + \Delta v_{3,11} \delta(\Delta v_{2,1})) \right] \\ 0 \end{bmatrix} \tag{281}
\end{aligned}$$

Die Skalarprodukte der Variationsterme der nichtlinearen Dehnungsincremente (279) bis (281) werden als Skalarprodukt der Vektoren  $\Delta\mathbf{g}_i$  bzw.  $\Delta\tilde{\mathbf{g}}_i$  geschrieben. Diese Notation wird vorbereitend für die Entwicklung der algebraischen Bestimmungsgleichungen eingeführt. Exemplarisch wird dieser Schritt für den ersten Term aus (278) gezeigt :

$$\int_L \delta(\Delta\epsilon_{(1)}^N)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)} A dl \tag{282}$$

$$= \int_L \begin{bmatrix} (\Delta v_{2,1} \delta(\Delta v_{2,1}) + \Delta v_{3,1} \delta(\Delta v_{3,1})) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11(1)} \\ s_{12(1)} \\ s_{13(1)} \end{bmatrix} A dl \tag{283}$$

$$= \int_L \{ \delta(\Delta v_{2,1}) s_{11(1)} \Delta v_{2,1} + \delta(\Delta v_{3,1}) s_{11(1)} \Delta v_{3,1} \} A dl \tag{284}$$

$$= \int_L \delta(\Delta\mathbf{g}_{(1)})^T s_{11(1)} \Delta\mathbf{g}_{(1)} A dl \tag{285}$$

$$\text{mit } \Delta\mathbf{g}_{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{2,1} \\ \Delta v_{3,1} \end{bmatrix}$$

Die restlichen Terme aus (278) werden analog zu (282) entwickelt. Die Indizierung  $i$  der Vektoren  $\Delta\mathbf{g}_{(i)}$  orientiert sich an den Indizes der nichtlinearen Dehnungsincremente  $\Delta\epsilon_{(i)}^N$ . Ein zweiter Index  $k$  in  $\Delta\mathbf{g}_{(ik)}$  kennzeichnet ggf. die Nummer des Skalarprodukts innerhalb eines Terms. Vektoren  $\Delta\tilde{\mathbf{g}}_i$  enthalten die Koeffizienten der Vektoren  $\Delta\mathbf{g}_i$  in vertauschter Reihenfolge.

$$\begin{aligned}
& \int_L \delta(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{(2)}^N)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)} I_3 dl \\
&= - \int_L \delta(\Delta \mathbf{g}_{(2)})^T s_{11(2)} \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(2)} I_3 dl + \int_L \delta(\Delta \mathbf{g}_{(21)})^T s_{13(2)} \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(21)} \frac{1}{2} I_3 dl \\
&\quad - \int_L \delta(\Delta \mathbf{g}_{(22)})^T s_{13(2)} \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(22)} \frac{1}{2} I_3 dl \tag{286}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \Delta \mathbf{g}_{(2)} &= \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta v_{3,11} \end{bmatrix} & \Delta \mathbf{g}_{(21)} &= \begin{bmatrix} \Delta v_{3,1} \\ \Delta v_{2,11} \end{bmatrix} & \Delta \mathbf{g}_{(22)} &= \begin{bmatrix} \Delta v_{3,11} \\ \Delta v_{2,1} \end{bmatrix} \\
\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(2)} &= \begin{bmatrix} \Delta v_{3,11} \\ \Delta \theta_1 \end{bmatrix} & \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(21)} &= \begin{bmatrix} \Delta v_{2,11} \\ \Delta v_{3,1} \end{bmatrix} & \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(22)} &= \begin{bmatrix} \Delta v_{2,1} \\ \Delta v_{3,11} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_L \delta(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{(3)}^N)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(3)} I_2 dl \\
&= \int_L \delta(\Delta \mathbf{g}_{(3)})^T s_{11(3)} \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(3)} I_2 dl - \int_L \delta(\Delta \mathbf{g}_{(21)})^T s_{12(3)} \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(21)} \frac{1}{2} I_2 dl \\
&\quad + \int_L \delta(\Delta \mathbf{g}_{(22)})^T s_{12(3)} \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(22)} \frac{1}{2} I_2 dl \tag{287}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \Delta \mathbf{g}_{(3)} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta v_{2,11} \end{bmatrix} \quad \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{(3)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{2,11} \\ \Delta \theta_1 \end{bmatrix}$$

Die Terme der äußeren Arbeiten werden in Analogie zu (275) und (276) bestimmt. Es wird vorausgesetzt, daß die am Element einwirkenden Lasten idealisiert an der Stabachse angreifen.

Die Verschiebungsinkremente  $\Delta \hat{\mathbf{v}}$  setzen sich zusammen aus dem Verschiebungsinkrement der Stabachse und Termen, die linear mit  $y_2$  bzw.  $y_3$  variieren (165). Die Variation des Verschiebungsinkrements beschränkt sich somit auf die Variation des Verschiebungsinkrements der Stabachse.

$$\begin{aligned}
& \int_C \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)})^T (\Delta \mathbf{q}_V \rho) dv \\
&= \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_L \delta (\Delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{T} \mathbf{y})^T (\Delta \mathbf{q}_V \rho) dy_2 dy_3 dl \\
&= \int_L \delta (\Delta \mathbf{v})^T (\Delta \mathbf{q}_V \rho) A dl \\
&= \int_L \delta (\Delta \mathbf{v})^T (\Delta \mathbf{q}_L) A dl
\end{aligned} \tag{288}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{C_u} \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)})^T \Delta \mathbf{p} da \\
&= \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_R \delta (\Delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{T} \mathbf{y})^T \Delta \mathbf{p} dy_2 dy_3 dr \\
&= [\delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta \mathbf{q}_r A]_R
\end{aligned} \tag{289}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{C_t} \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)})^T \Delta \mathbf{p}_0 da \\
&= \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_R \delta (\Delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{T} \mathbf{y})^T \Delta \mathbf{p}_0 dy_2 dy_3 dr \\
&= [\delta (\Delta \mathbf{v})^T \Delta \mathbf{q}_{r0} A]_R
\end{aligned} \tag{290}$$

In Analogie zu den Gleichungen (275) bis (290) werden die Anteile des Korrekturterms  $\Delta r$  bestimmt :

$$\begin{aligned}
& \int_C \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)})^T (\hat{\mathbf{q}}_V \rho) dv \\
&= \int_L \delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{q}}_L A dl
\end{aligned} \tag{291}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{C_u} \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)})^T \hat{\mathbf{p}} da \\
&= [\delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{q}}_r A]_R
\end{aligned} \tag{292}$$



$$\begin{aligned}
& \int_{C_t} \delta (\Delta \mathbf{v}_{(Q)})^T \hat{\mathbf{p}}_0 da \\
& = [\delta (\Delta \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{q}}_{r0} A]_R
\end{aligned} \tag{293}$$

$$\begin{aligned}
& \int_C \delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^L)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dv \\
& = \int_L \left\{ (\delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{(1)}^L)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)} A) + (\delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{(2)}^L)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)} I_3) + (\delta (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{(3)}^L)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(3)} I_2) \right\} dl
\end{aligned} \tag{294}$$

Mit Abschluß der semianalytischen Formulierung der Bestimmungsgleichungen sind alle kinematischen Größen der Integralgleichungen auf die Stabachse bezogen.

# 8 Algebraische Bestimmungsgleichungen

## 8.1 Ansatz im Finiten Element

### 8.1.1 Interpolation der Geometrie

Für die Interpolation der Geometrie eines geraden Stabelements wird ein linearer Interpolationsansatz im normalisierten Koordinatensystem gewählt.

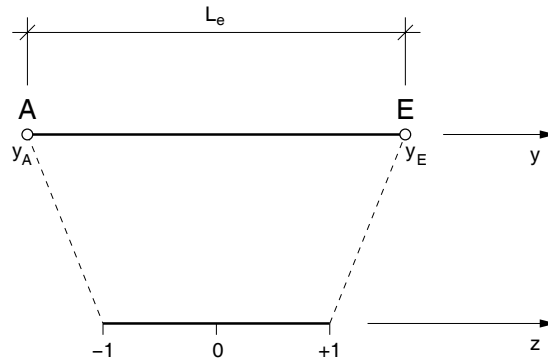


Bild 7: Elementbeschreibung im lokalen und normalisierten Koordinatensystem

$$y = \mathbf{y}_e^T \mathbf{s}_e(z) \quad -1 \leq z \leq +1$$
$$[y] = [y_A \quad y_E] \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-z) \\ (1+z) \end{bmatrix} \quad (295)$$

### 8.1.2 Interpolation der Physik

Zur Interpolation der axialen Verschiebungen  $v_1$  und der Verdrehung  $\theta_1$  wird ein linearer Ansatz nach Lagrange gewählt, der sich auf die Stabendknoten  $A$  und  $E$  abstützt. Die Verschiebungen  $v_2$  und  $v_3$  werden durch einen kubischen Ansatz nach Hermite interpoliert. Als Stützwerte an den Stabendknoten werden die Größen  $v_1, v_2, v_3, \theta_1$ , sowie die Ableitungen  $(v_{2,1}), (v_{3,1})$  nach der globalen  $y_1$ -Koordinate als Stützwerte geführt. Für ein Stabelement sind somit 12 Freiheitsgrade definiert. Die Stützwerte werden knotenweise in einem Elementstützvektor  $\mathbf{v}_e$  angeordnet. Bezogen auf das normalisierte System wird der Elementstützvektor mit  $\mathbf{w}_e$  bezeichnet. Die Ansatzfunktionen werden zweckmäßig in einer Matrix  $\mathbf{H}_e$  gespeichert.

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{H}_e^T(z) \mathbf{w}_e \quad (296)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \theta_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_5 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1(A) \\ w_2(A) \\ w_3(A) \\ \phi(A) \\ \frac{dw_2}{dy}(A) \\ \frac{dw_3}{dy}(A) \\ w_1(E) \\ w_2(E) \\ w_3(E) \\ \phi(E) \\ \frac{dw_2}{dy}(E) \\ \frac{dw_3}{dy}(E) \end{bmatrix}_e \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_3^T \\ \mathbf{h}_4^T \end{bmatrix} \mathbf{w}_e = \mathbf{H}_e^T \mathbf{w}_e
\end{aligned}$$

Die Ansatzfunktionen von  $\mathbf{H}_e$  sind definiert im Einheitsintervall ( $-1 \leq z \leq +1$ ):

1. Ansatzfunktionen nach Lagrange zur Interpolation der Axialdehnung und Torsion:

$$\begin{aligned}
t_1 &= 0.5(1 - z) \\
t_2 &= 0.5(1 + z)
\end{aligned} \tag{297}$$

2. Ansatzfunktionen nach Hermite zur Interpolation der Biegung :

$$\begin{aligned}
h_1 &= 0.25(2 - 3z + z^3) \\
h_2 &= 0.25(1 - z - z^2 + z^3) \\
h_3 &= 0.25(2 + 3z - z^3) \\
h_4 &= 0.25(-1 - z + z^2 + z^3) \\
h_5 &= 0.25(-1 + z + z^2 - z^3) \\
h_6 &= 0.25(1 + z - z^2 - z^3)
\end{aligned} \tag{298}$$



### 8.1.4 Ableitungen des Stützvektors

**Notation :** Im folgenden werden die Koeffizienten der Transformationsmatrix  $\mathbf{A}_e$  sowie ggf. die Ableitungen der Geometrie ( $dx/dz$ ) bzw. ( $dz/dx$ ) in die Interpolationspolynome (297) und (298) aufgenommen. Diese Zusammenfassung von Termen wird durch das Symbol  $\hat{\phantom{x}}$  gekennzeichnet.

### 8.1.5 1. Ableitungen

Die Ableitung der Stützwerte nach der  $y$ -Koordinate erfolgt über die Kettenregel:

$$\frac{d v_i}{d y} = \frac{d v_i}{d z} \frac{d z}{d y} \quad (302)$$

1. Ableitung der Stützwerte nach der normalisierten Koordinate  $z$

$$\frac{d v_i}{d z} = \mathbf{H}_{e,z}^T \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e \quad (303)$$

Die Interpolationspolynome aus (297) und (298) besitzen folgende Ableitungen nach der normalisierten Koordinate  $z$  :

$$\frac{d t_i(z)}{d z} : \quad \begin{aligned} t_{1,z} &= -0.5 \\ t_{2,z} &= +0.5 \end{aligned} \quad (304)$$

$$\frac{d h_i(z)}{d z} : \quad \begin{aligned} h_{1,z} &= 0.25 (-3 + 3z^2) \\ h_{2,z} &= 0.25 (-1 - 2z + 3z^2) \\ h_{3,z} &= 0.25 (3 - 3z^2) \\ h_{4,z} &= 0.25 (-1 + 2z + 3z^2) \\ h_{5,z} &= 0.25 (1 + 2z - 3z^2) \\ h_{6,z} &= 0.25 (1 - 2z - 3z^2) \end{aligned} \quad (305)$$

2. Ableitung der normalisierten Koordinate  $z$  nach der lokalen Koordinate  $y$

$$\frac{d z}{d y} = (\mathbf{y}_e^T \cdot \mathbf{s}_z)^{-1} = (\mathbf{y}_z)^{-1} \quad (306)$$

Die Interpolationspolynome aus (295) besitzen folgende Ableitungen nach den normalisierten Koordinaten :

$$\frac{d s_i(z)}{d z} : \quad \begin{aligned} s_{1,z} &= -0.5 \\ s_{2,z} &= +0.5 \end{aligned} \quad (307)$$

$$\frac{d z}{d y} = \left( \frac{1}{2}(y_E - y_A) \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2}L_e \right)^{-1} \quad (308)$$

$$\frac{d z}{d y} = \frac{2}{L_e} \quad (309)$$

Für die erste Ableitung der Stützweite nach der lokalen Koordinate  $y$  folgt unter Berücksichtigung der Notation für die Zusammenfassung des Produktes ( $\mathbf{A}_e \frac{2}{L_e}$ ):

$$\boxed{\frac{d v_i}{d y} = \mathbf{H}_{e,z}^T \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e \frac{2}{L_e} = \hat{\mathbf{H}}_{e,z}^T \mathbf{v}_e} \quad (310)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d v_1}{d y} \\ \frac{d v_2}{d y} \\ \frac{d v_3}{d y} \\ \frac{d \theta_1}{d y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ \theta_{1,1} \end{bmatrix} = \frac{2}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{1,z}^T \\ \mathbf{h}_{2,z}^T \\ \mathbf{h}_{3,z}^T \\ \mathbf{h}_{4,z}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{1,z}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{4,z}^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_e \quad (311)$$

### 8.1.6 2. Ableitungen

Die 1. Ableitung des Geometrieansatzes ist konstant. Die 2. Ableitungen der Stützweite nach der  $y$ -Koordinate folgt wiederum über die Kettenregel.

$$\frac{d^2 v_i}{d y^2} = \frac{d^2 v_i}{d z^2} \left( \frac{d z}{d y} \right)^2 \quad (312)$$

#### 1. Zweite Ableitung der Stützweite nach den normalisierten Koordinaten

$$\frac{d^2 v_i}{d z^2} = \mathbf{H}_{e,zz}^T \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e \quad (313)$$

Die Interpolationspolynome aus (304) und (305) werden nochmals nach der normalisierten Koordinate abgeleitet:

$$\frac{d^2 t_i(z)}{d z^2} : \quad \begin{array}{l} t_{1,zz} = 0 \\ t_{2,zz} = 0 \end{array} \quad (314)$$

$$\frac{d^2 h_i(z)}{d z^2} : \quad \begin{array}{l} h_{1,zz} = 1.5z \\ h_{2,zz} = -0.5 + 1.5z \\ h_{3,zz} = -1.5z \\ h_{4,zz} = 0.5 + 1.5z \\ h_{5,zz} = 0.5 - 1.5z \\ h_{6,zz} = -0.5 - 1.5z \end{array} \quad (315)$$

2. Ableitung der normalisierten Koordinate nach der lokalen Koordinate

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2}{L_e} \quad (316)$$

Für die zweite Ableitung der Stützwerte nach der Koordinate  $y$  folgt :

$$\boxed{\frac{d^2 v_i}{dy^2} = \mathbf{H}_{e,zz}^T \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e \frac{4}{L_e^2} = \hat{\mathbf{H}}_{e,zz}^T \mathbf{v}_e} \quad (317)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 v_1}{dy^2} \\ \frac{d^2 v_2}{dy^2} \\ \frac{d^2 v_3}{dy^2} \\ \frac{d^2 \theta_1}{dy^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,11} \\ v_{2,11} \\ v_{3,11} \\ \theta_{1,11} \end{bmatrix} = \frac{4}{L_e^2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{1,zz}^T \\ \mathbf{h}_{2,zz}^T \\ \mathbf{h}_{3,zz}^T \\ \mathbf{h}_{4,zz}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{1,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{4,zz}^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_e \quad (318)$$

## 8.2 Inkrementeller Verschiebungsansatz

Die inkrementellen Verschiebungen der Bestimmungsgleichungen aus 7.6 werden mit dem Ansatz (301) interpoliert. Für die Bestimmung des bekannten Dehnungszustandes der Momentankonfiguration  $\hat{C}$  werden die Interpolationsansätze (310) und (317) in die Gleichung (114) substituiert.

Für die Verschiebungsableitungen aus (114) folgt mit den Interpolationsansätzen :

$$\begin{aligned} v_{i,1} &= \hat{\mathbf{h}}_{i,z}^T \mathbf{v}_e \\ v_{i,11} &= \hat{\mathbf{h}}_{i,zz}^T \mathbf{v}_e \end{aligned}$$

Die Quadrate der Verschiebungsableitungen werden durch die Quadrate der Skalarprodukte der Interpolationsansätze ersetzt :

$$v_{i,1}^2 = (\mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_{i,z})(\hat{\mathbf{h}}_{i,z}^T \mathbf{v}_e) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

### 8.2.1 Interpolation des Dehnungszustandes der Momentankonfiguration $\hat{C}$

$$\boldsymbol{\epsilon}_Q = \boldsymbol{\epsilon}_{(1)} + y_2 \boldsymbol{\epsilon}_{(2)} + y_3 \boldsymbol{\epsilon}_{(3)} \quad (319)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11(1)} \\ \epsilon_{12(1)} \\ \epsilon_{13(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{1,z}^T \mathbf{v}_e + \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T + \hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T) \mathbf{v}_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (320)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11(2)} \\ \epsilon_{12(2)} \\ \epsilon_{13(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_4 \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_{2,zz} \\ 0 \\ \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_{4,z} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T - \hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T) \mathbf{v}_e \end{bmatrix} \quad (321)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(3)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11(3)} \\ \epsilon_{12(3)} \\ \epsilon_{13(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_4 \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_{3,zz} \\ - \left( \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{h}}_{4,z} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T - \hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T) \mathbf{v}_e \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (322)$$



## 8.2.2 Interpolation der Dehnungsinkremente

Die Interpolationsvorschrift für die Dehnungsinkremente  $\Delta\epsilon_{(i)}^L$  folgt durch Substitution der Ansätze (310) und (317) in die Gleichungen (258) bis (260).

Die Dehnungsinkremente  $\Delta\epsilon_{(i)}^L$  werden durch konstante und linear von den Anfangsverschiebungen abhängige Interpolationspolynome interpoliert. Für die Entwicklung der algebraischen Gleichungen werden die Interpolationspolynome der einzelnen Terme in den konstanten Vektoren  $\mathbf{b}_{Ci(k)}^T$  und den verschiebungsabhängigen Vektoren  $\mathbf{b}_{Li(k)}^T$  erfasst.

$$\Delta\epsilon_{(1)}^L = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(1)}^L \\ \Delta\epsilon_{12(1)}^L \\ \Delta\epsilon_{13(1)}^L \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{C1(1)}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{L1(1)}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \right\} \cdot \Delta\mathbf{v}_e \quad (323)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{C1(1)}^T &= \hat{\mathbf{h}}_{1,z}^T \\ \mathbf{b}_{L1(1)}^T &= \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T + \hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T) \end{aligned}$$

$$\Delta\epsilon_{(2)}^L = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(2)}^L \\ \Delta\epsilon_{12(2)}^L \\ \Delta\epsilon_{13(2)}^L \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{C1(2)}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{b}_{C3(2)}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{L1(2)}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{b}_{L3(2)}^T \end{bmatrix} \right\} \cdot \Delta\mathbf{v}_e \quad (324)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{C1(2)}^T &= -\hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \\ \mathbf{b}_{L1(2)}^T &= -\mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_4 \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T + \hat{\mathbf{h}}_{3,zz} \hat{\mathbf{h}}_4^T) \\ \mathbf{b}_{C3(2)}^T &= \hat{\mathbf{h}}_{4,z}^T \\ \mathbf{b}_{L3(2)}^T &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{2,zz} \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T + \hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T - \hat{\mathbf{h}}_{3,zz} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T - \hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T) \end{aligned}$$

$$\Delta\epsilon_{(3)}^L = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(3)}^L \\ \Delta\epsilon_{12(3)}^L \\ \Delta\epsilon_{13(3)}^L \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{C1(3)}^T \\ \mathbf{b}_{C2(3)}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{L1(3)}^T \\ \mathbf{b}_{L2(3)}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \right\} \cdot \Delta\mathbf{v}_e \quad (325)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{C1(3)}^T &= -\hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \\ \mathbf{b}_{L1(3)}^T &= \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_4 \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T + \hat{\mathbf{h}}_{2,zz} \hat{\mathbf{h}}_4^T) \\ \mathbf{b}_{C2(3)}^T &= -\hat{\mathbf{h}}_{4,z}^T \\ \mathbf{b}_{L2(3)}^T &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{2,zz} \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T + \hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T - \hat{\mathbf{h}}_{3,zz} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T - \hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T) \end{aligned}$$

Die Interpolationsmatrizen der nichtlinear vom Verschiebungsinkrement abhängigen Dehnungsinkremente  $\Delta\epsilon_{(i)}^{nl}$  bestimmen sich analog zu (323) bis (325) aus den Gleichungen (261) bis (263).

$$\Delta\epsilon_{(1)}^N = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(1)}^N \\ \Delta\epsilon_{12(1)}^N \\ \Delta\epsilon_{13(1)}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N1(1)}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta\mathbf{v}_e \quad (326)$$

$$\mathbf{b}_{N1(1)}^T = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{2,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T + \hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T)$$

$$\Delta\epsilon_{(2)}^N = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(2)}^N \\ \Delta\epsilon_{12(2)}^N \\ \Delta\epsilon_{13(2)}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N1(2)}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{b}_{N3(2)}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta\mathbf{v}_e \quad (327)$$

$$\mathbf{b}_{N1(2)}^T = -\Delta\mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_4 \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T)$$

$$\mathbf{b}_{N3(2)}^T = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T - \hat{\mathbf{h}}_{3,zz} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T)$$

$$\Delta\epsilon_{(3)}^N = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11(3)}^N \\ \Delta\epsilon_{12(3)}^N \\ \Delta\epsilon_{13(3)}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N1(3)}^T \\ \mathbf{b}_{N2(3)}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta\mathbf{v}_e \quad (328)$$

$$\mathbf{b}_{N1(3)}^T = \Delta\mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_4 \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T)$$

$$\mathbf{b}_{N2(3)}^T = -\frac{1}{2} \Delta\mathbf{v}_e^T (\hat{\mathbf{h}}_{3,z} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T - \hat{\mathbf{h}}_{3,zz} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T)$$

Ebenfalls mit den Interpolationsansätzen (310) und (317) werden die Vektoren  $\Delta \mathbf{g}^{(i)}$  aus der Variation der nichtlinearen Dehnungsinkremente (282)-(287) bestimmt. Die Notation der Interpolationsmatrizen  $\mathbf{G}^{(i)}$  entspricht den eingeführten Regeln auf Seite 45.

$$\Delta \mathbf{g}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{2,1} \\ \Delta v_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{G}^{(1)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (329)$$

$$\Delta \mathbf{g}^{(2)} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta v_{3,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_4^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{G}^{(2)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (330)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{3,11} \\ \Delta \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_4^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \tilde{\mathbf{G}}^{(2)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (331)$$

$$\Delta \mathbf{g}^{(21)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{3,1} \\ \Delta v_{2,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{G}^{(21)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (332)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}^{(21)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{2,11} \\ \Delta v_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{3,z}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \tilde{\mathbf{G}}^{(21)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (333)$$

$$\Delta \mathbf{g}^{(22)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{3,11} \\ \Delta v_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{G}^{(22)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (334)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}^{(22)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{2,1} \\ \Delta v_{3,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{2,z}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{3,zz}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \tilde{\mathbf{G}}^{(22)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (335)$$

$$\Delta \mathbf{g}^{(3)} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta v_{2,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_4^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{G}^{(3)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (336)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \Delta v_{2,11} \\ \Delta \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{2,zz}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_4^T \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{v}_e = \tilde{\mathbf{G}}^{(3)} \Delta \mathbf{v}_e \quad (337)$$

### 8.3 Systemgleichungen

Für die Formulierung der Systemgleichungen wird ein Systemvektor  $\hat{\mathbf{v}}_s$  eingeführt. Er enthält alle globalen Stützwerte der Momentankonfiguration  $\hat{C}$ . Für die Berechnung der inkrementellen Verschiebungsgrößen der Momentankonfiguration  $\bar{C}$  wird der inkrementelle Stützvektor  $\Delta \mathbf{v}_s$  eingeführt.

#### 8.3.1 Topologie

Der Zusammenhang zwischen Elementfreiwerten und Systemfreiwerten wird über Topologiematrizen  $\mathbf{R}_e$  hergestellt.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_e &= \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{v}}_s \\
 \Delta \mathbf{v}_e &= \mathbf{R}_e \Delta \mathbf{v}_s \\
 \Delta \boldsymbol{\epsilon}_i^l &= (\mathbf{B}_{(i)}^c + \mathbf{B}_{(i)}^l) \mathbf{R}_e \Delta \mathbf{v}_s \\
 \Delta \mathbf{g}_{(i)} &= \mathbf{G}_{(i)} \mathbf{R}_e \Delta \mathbf{v}_s
 \end{aligned} \tag{338}$$

#### 8.3.2 Systemsteifigkeit

Die Systemsteifigkeit wird mit den Gleichungen (275) und (276) durch Substitution der Ansätze bestimmt. Für die Variation des inneren Kraftvektors ergibt sich damit :

$$\begin{aligned}
 \delta f_{(int)} &= \delta (\Delta \mathbf{v}_s)^T \left\{ \sum_e \mathbf{R}_e^T \mathbf{K}_T \mathbf{R}_e \right\} \Delta \mathbf{v}_s \\
 &= \delta (\Delta \mathbf{v}_s)^T \left\{ \sum_e \mathbf{R}_e^T (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G) \mathbf{R}_e \right\} \Delta \mathbf{v}_s \\
 &= \delta (\Delta \mathbf{v}_s)^T \left\{ \sum_e \mathbf{R}_e^T (\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_G) \mathbf{R}_e \right\} \Delta \mathbf{v}_s
 \end{aligned} \tag{339}$$

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  setzt sich aus folgenden Teilsteifigkeiten zusammen :

Die materielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_M$  bildet die Kernsteifigkeit der inkrementellen Berechnung der Laststufe  $m$ . Sie enthält einen verschiebungsunabhängigen Anteil  $\mathbf{K}_C$  der linearen Theorie und den verschiebungsabhängigen Anteil  $\mathbf{K}_D$  der die Anfangsverschiebungen zu Beginn der Laststufe  $m$  enthält. Die materielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_M$  ist nichtlinear vom Verschiebungsincrement der Laststufe abhängig. Die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$  beinhaltet den Spannungsanteil der inkrementellen Steifigkeit infolge der Änderungen in der Geometrie.

Die Steifigkeitmatrizen  $\mathbf{K}_C$  und  $\mathbf{K}_D$  werden aus Gleichung (275) mit den Ansätzen (323) bis (328) bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_C = & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(1)} \mathbf{b}_{C1(1)}^T EA dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(2)} \mathbf{b}_{C1(2)}^T EI_3 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C3(2)} \mathbf{b}_{C3(2)}^T GI_3 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(3)} \mathbf{b}_{C1(3)}^T EI_2 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C2(3)} \mathbf{b}_{C2(3)}^T GI_2 dL_e \end{aligned} \quad (340)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_D = & \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(1)} \mathbf{b}_{L1(1)}^T EA dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(1)} \mathbf{b}_{L1(1)}^T EA dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(1)} \mathbf{b}_{C1(1)}^T EA dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(2)} \mathbf{b}_{L1(2)}^T EI_3 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(2)} \mathbf{b}_{L1(2)}^T EI_3 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(2)} \mathbf{b}_{C1(2)}^T EI_3 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{L3(2)} \mathbf{b}_{L3(2)}^T GI_3 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{C3(2)} \mathbf{b}_{L3(2)}^T GI_3 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{L3(2)} \mathbf{b}_{C3(2)}^T GI_3 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(3)} \mathbf{b}_{L1(3)}^T EI_2 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(3)} \mathbf{b}_{L1(3)}^T EI_2 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(3)} \mathbf{b}_{C1(3)}^T EI_2 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{L2(3)} \mathbf{b}_{L2(3)}^T GI_2 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{C2(3)} \mathbf{b}_{L2(3)}^T GI_2 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{L2(3)} \mathbf{b}_{C2(3)}^T GI_2 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(1)} \mathbf{b}_{N1(1)}^T EA dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(1)} \mathbf{b}_{N1(1)}^T EA dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(2)} \mathbf{b}_{N1(2)}^T EI_3 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(2)} \mathbf{b}_{N1(2)}^T EI_3 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C3(2)} \mathbf{b}_{N3(2)}^T GI_3 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L3(2)} \mathbf{b}_{N3(2)}^T GI_3 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C1(3)} \mathbf{b}_{N1(3)}^T EI_2 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L1(3)} \mathbf{b}_{N1(3)}^T EI_2 dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{b}_{C2(3)} \mathbf{b}_{N2(3)}^T GI_2 dL_e + \int_{L_e} \mathbf{b}_{L2(3)} \mathbf{b}_{N2(3)}^T GI_2 dL_e \end{aligned} \quad (341)$$

Die Gleichungen (333) bis (337) substituiert in (282) bis (287) ergeben die geometrische Steifigkeitsmatrix :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G = & \int_{L_e} \mathbf{G}_{(1)}^T \mathbf{G}_{(1)} A s_{11(1)} dL_e - \int_{L_e} \mathbf{G}_{(2)}^T \tilde{\mathbf{G}}_{(2)} I_3 s_{11(2)} dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{G}_{(21)}^T \tilde{\mathbf{G}}_{(21)} I_3 s_{13(2)} dL_e - \int_{L_e} \mathbf{G}_{(22)}^T \tilde{\mathbf{G}}_{(22)} I_3 s_{13(2)} dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{G}_{(3)}^T \tilde{\mathbf{G}}_{(3)} I_2 s_{11(3)} dL_e - \int_{L_e} \mathbf{G}_{(21)}^T \tilde{\mathbf{G}}_{(21)} I_2 s_{12(3)} dL_e + \\ & \int_{L_e} \mathbf{G}_{(22)}^T \tilde{\mathbf{G}}_{(22)} I_2 s_{12(3)} dL_e \end{aligned} \quad (342)$$

Analog zum inneren Kraftvektor bestimmt sich der äußere Kraftvektor durch Substitution der Ansätze :

$$\delta f_{(ext)} = \delta (\Delta \mathbf{v}_s)^T \left\{ \Delta \mathbf{r} + \sum_e \mathbf{R}_e^T (\Delta \mathbf{q}_L) + \sum_r \mathbf{R}_r^T (\Delta \mathbf{q}_r + \Delta \mathbf{q}_{r0}) \right\} \quad (343)$$

Die Terme aus (343) einzeln betrachtet, berechnen sich nach folgenden Vorschriften :

$$\Delta \mathbf{q}_L = \int_{L_e} \hat{\mathbf{H}}_e \Delta q_L A dL \quad (344)$$

$$\Delta \mathbf{q}_r = [\hat{\mathbf{H}}_e \Delta q_r A]_R \quad (345)$$

$$\Delta \mathbf{q}_{r0} = [\hat{\mathbf{H}}_e \Delta q_{r0} A]_R \quad (346)$$

Der Korrekturvektor  $\Delta \mathbf{r}$  setzt sich wie folgt zusammen :

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_e \mathbf{R}_e^T (\hat{\mathbf{q}}_L - \hat{\mathbf{q}}_\sigma) + \sum_r \mathbf{R}_r^T (\hat{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{q}}_{r0}) \quad (347)$$

Die Terme aus (347) einzeln betrachtet, berechnen sich nach folgenden Vorschriften :

$$\hat{\mathbf{q}}_L = \int_{L_e} \hat{\mathbf{H}}_e q_L A dL \quad (348)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_r = [\hat{\mathbf{H}}_e q_r A]_R \quad (349)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{r0} = [\hat{\mathbf{H}}_e q_{r0} A]_R \quad (350)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_\sigma = & \int_{L_e} (\mathbf{b}_{1(1)}^c + \mathbf{b}_{1(1)}^l) A s_{11(1)} dL_e + \int_{L_e} (\mathbf{b}_{1(2)}^c + \mathbf{b}_{1(2)}^l) I_3 s_{11(2)} dL_e + \\ & \int_{L_e} (\mathbf{b}_{2(3)}^c + \mathbf{b}_{2(3)}^l) I_2 s_{12(3)} dL_e + \int_{L_e} (\mathbf{b}_{1(3)}^c + \mathbf{b}_{1(3)}^l) I_2 s_{11(3)} dL_e + \\ & \int_{L_e} (\mathbf{b}_{3(2)}^c + \mathbf{b}_{3(2)}^l) I_3 s_{13(2)} dL_e \end{aligned} \quad (351)$$

Mit Abschluß der algebraischen Formulierungen der Elementmatrizen und der Elementvektoren, werden die  $n$  inkrementellen Systemgleichungen durch die Systemtopologie und  $n$ -fache Variation des System-Stützvektors bestimmt.

$$\mathbf{K}_s \Delta \mathbf{v}_s = \Delta \mathbf{q}_s + \Delta \mathbf{q}_{0s}$$

(352)

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_C + \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_G$$

$$\Delta \mathbf{q}_s = \Delta \mathbf{q}_L$$

$$\Delta \mathbf{q}_{0s} = \Delta \mathbf{q}_r + \Delta \mathbf{q}_{r0} + \Delta \mathbf{r}$$

## 9 Transformation lokal-global

### 9.1 Globales und lokales Koordinatensystem

Die Formulierung der Elementmatrizen und Elementvektoren erfolgt im lokalen Koordinatensystem der Elemente. Für die Formulierung der Systemgleichungen wird eine beliebige Lage der Elemente im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  durch eine entsprechende Koordinatentransformation zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem berücksichtigt.

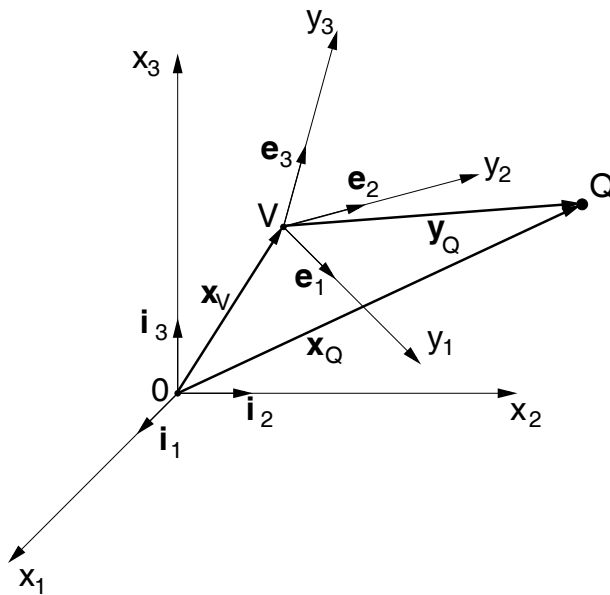


Bild 8: Globales und lokales Koordinatensystem

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  bilden eine globale ortsfeste Basis für den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ . Die Lage eines beliebigen Punktes  $Q$  im  $\mathbb{R}^3$  wird durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{x}_{(Q)}$  festgelegt. Der Ortsvektor  $\mathbf{x}_{(Q)}$  ist eine Linearkombination der Basisvektoren mit den Koordinaten von  $Q$  :

$$\mathbf{x}_{(Q)} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 \quad (353)$$

Die Beschreibung desselben Punktes  $Q$  in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem  $(y_1, y_2, y_3)$  mit Basisvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  und Ursprung  $V$  erfolgt durch den Vektor  $\mathbf{y}_{(Q)}$  in analoger Weise.

$$\mathbf{y}_{(Q)} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3 \quad (354)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{x}_{(Q)}$  und  $\mathbf{y}_{(Q)}$  wird durch die Transformation (355) zwischen dem lokalen und dem globalen Koordinatensystem hergestellt.

$$\mathbf{x}_{(Q)} = \mathbf{x}_V + \mathbf{R} \mathbf{y}_{(Q)} \quad (355)$$

$\mathbf{x}_V$  Ortsvektor zum Ursprung  $V$  des lokalen Koordinatensystem  $(y_1, y_2, y_3)$

$\mathbf{R}$  Rotationsmatrix ( $3 \times 3$ )



## 9.2 Transformation der Zustandsgrößen

Die Transformation der Zustandsgrößen vom lokalen Elementkoordinatensystem  $(y_1, y_2, y_3)$  in das globale kartesische Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  erfolgt komponentenweise. Mit den Transformationsvorschriften für Tensoren 1. Stufe lautet die Transformation der Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v} \quad (356)$$

$\mathbf{u}$  Vektor der Stützwerte der Verschiebung im globalen Koordinatensystem

$\mathbf{v}$  Vektor der Stützwerte der Verschiebung im lokalen Koordinatensystem

$\mathbf{Q}$  Transformationsmatrix mit  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$

Mit der Transformationsvorschrift für symmetrische Tensoren 2. Stufe werden die Dehnungen nach Green-Lagrange, die 2. Piola-Kirchoff-Spannungen und die Elementsteifigkeitsmatrix transformiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_y \mathbf{Q} \\ \mathbf{S}_x &= \mathbf{Q}^T \mathbf{S}_y \mathbf{Q} \\ \mathbf{K}_x &= \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_y \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (357)$$

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{Q}$  ist nur auf der Hauptdiagonalen mit  $(3 \times 3)$  Matrizen  $\mathbf{C}$  belegt. Die Matrix  $\mathbf{C}$  enthält zeilenweise die normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  des lokalen Koordinatensystems  $(y_1, y_2, y_3)$  im  $\mathbb{R}^3$ . Die drei Drehfreiheitsgrade pro Knoten werden analog zu den Verschiebungsfreiheitsgraden durch die Matrix  $\mathbf{C}$  transformiert.

$$\mathbf{Q}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C} & & \\ & & \mathbf{C} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix}$$

## 9.3 Bestimmung der Transformationsmatrix

Die Lage und die Orientierung jedes Stabelements im  $\mathbb{R}^3$  wird durch die globalen Koordinaten seines Anfangsknoten  $A$  und Endknotens  $E$  spezifiziert. Die globalen Koordinaten von Knoten  $i$  sind im Vektor  $\mathbf{x}_i$  gespeichert.

$$\mathbf{x}_i = \{x_{1_i}, x_{2_i}, x_{3_i}\}^T \quad (358)$$

Das lokale Elementkoordinatensystem wird so eingeführt, daß die Stabachse mit der  $y_1$ -Achse zusammenfällt. Durch die bekannten Koordinaten der Elementknoten  $A$  und  $E$  ist somit die Orientierung der Stabachse im Raum festgelegt. Der entsprechende Basisvektor  $\mathbf{e}_1$  berechnet sich mit (359).

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_E - \mathbf{x}_A \quad (359)$$

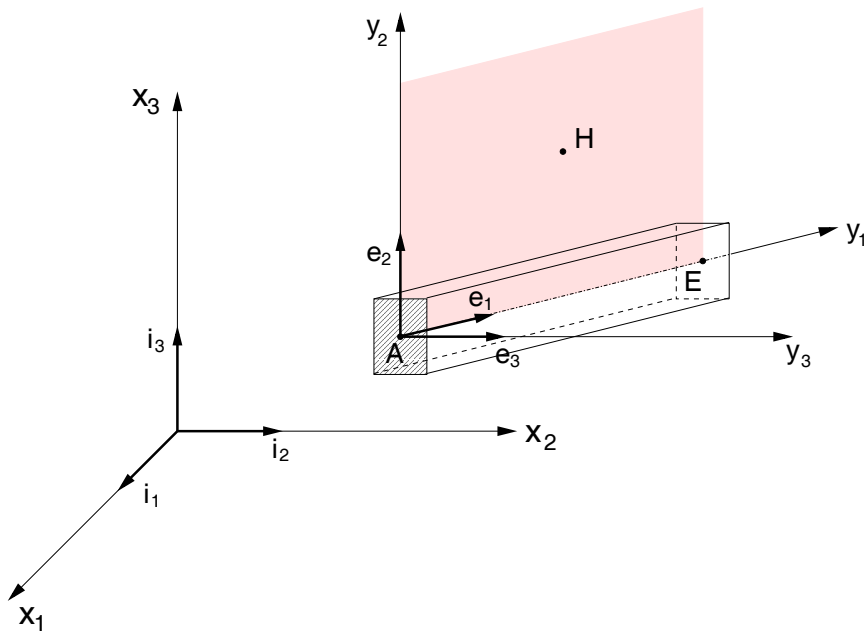


Bild 9: Orientierung eines Elementes im  $\mathbb{R}^3$

Zur Berechnung der Basisvektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  ist ein Hilfsknoten  $H$  erforderlich, der mit den Knoten  $A$  und  $E$  eine Fläche definiert. Der Hilfsknoten  $H$  wird so eingeführt, daß er in der  $y_1 - y_2$ -Ebene liegt. Mit  $\mathbf{y}_{AH}$  berechnen sich die Basisvektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  über das Kreuzprodukt.

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{x}_H - \mathbf{x}_A) \quad (360)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (361)$$

# Literatur

- [1] Argyris, J., Mlejnek, H.-P.  
*Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik, Band II - Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten*  
Vieweg & Sohn, Braunschweig 1987
- [2] Bathe K.-J., Bolourchi S.  
*Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures*  
Int. J. num. Meth. Engng, Vol. 14, pp. 961-986, 1979
- [3] Meek J.L., Tan H.S.  
*Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique*  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,  
Volume 47(1984)No.3, p.261-282  
Elsevier Science Publisher B.V.(North-Holland), 1984
- [4] Pahl P.J.  
*Nichtlineare Elastizitätstheorie*  
als Skript veröffentlicht, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden,  
Technische Universität Berlin, Juni 2000
- [5] Pahl P.J., Damrath R.  
*Geometrisch Nichtlineare Bauwerke*  
als Skript veröffentlicht, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden,  
Technische Universität Berlin, September 1982
- [6] Salzgeber, G.  
*Nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabtragwerken aus Stahl*  
Dissertation, Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke,  
Technische Universität Graz, Januar 2000
- [7] Szilard R. *Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik*  
Band 1 - Stabwerke, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1982